Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 17.07.2006

Analysis IV

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Berechnung einiger Volumina

(a) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ des Ellipsoids $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, wobei $a,b,c > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip von Cavalieri und Aufgabe G1 vom 12. Übungsblatt.

(b) Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ entsteht.

LÖSUNG:

(a) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 - (z/c)^2\}$. Also ist $M_z = \emptyset$ wenn $|z| > c$; $M_z = \{(0,0)\}$ wenn $|z| = c$;

$$M_z \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \Big(\frac{x}{a\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 \leq 1\Big\}$$

wenn $|z| < c$. Letzteres ist eine Ellipse, deren Flächeninhalt laut G1 vom 12. Übungsblatt,

$$\lambda_2(M_z) \;=\; \pi a\sqrt{1-(z/c)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1-(z/c)^2} \;=\; \pi ab(1-(z/c)^2)$$

ist. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) \;=\; \int_{[-c,c]} \pi ab(1-(z/c)^2)\, d\lambda_1(z) \\
&= \pi ab \int_{-c}^{c} (1-(z/c)^2)\, dz \;=\; \pi ab \Big[z - \frac{z^3}{3c^2}\Big]_{-c}^{c} \\
&= \pi ab\,(2c - 2c/3) \;=\; \tfrac{4\pi}{3} abc\,.
\end{aligned}$$

(b) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \emptyset$ falls $|z| > 1$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi/2$) falls $|z| \leq \sqrt{2}/2$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi(1-z^2)$) falls $\sqrt{2}/2 < |z| \leq 1$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) \\
&= \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \pi/2\, dz \;+\; \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \pi(1-z^2)\, dz \;+\; \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \pi(1-z^2)\, dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\Big[z - z^3/3\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1} \;=\; \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\,(2/3 - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/12) \\
&= \frac{4-2\sqrt{2}}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

(G 2) Volumen eines Rotationskörpers

Es sei $r:\mathbb{R}\to[0,\infty[$ eine messbare Funktion. Uns interessiert das Volumen des Rotationskörpers

$$M \;:=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \sqrt{x^2+y^2}\le r(z)\} \;=\; h^{-1}([0,\infty[)$$

mit $h\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $h(x,y,z):=r(z)-\sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_3(M)=\pi\int_{\mathbb{R}} r(z)^2\,d\lambda_1(z)$.

(c) Berechnen Sie für $\alpha>0$ das Volumen der Menge

$$M \;:=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z\ge 1 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2}\le z^{-\alpha}\}\,.$$

LÖSUNG:

(a) Die Funktion h ist aus messbaren Funktionen aufgebaut und somit messbar. Da $[0,\infty[\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, folgt $M=h^{-1}([0,\infty[)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Für $z\in\mathbb{R}$ ist $M_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon (x,y,z)\in M\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \sqrt{x^2+y^2}\le r(z)\}=K_{r(z)}(0)$ die abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r(z)$. Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\lambda_3(M) \;=\; \int_{\mathbb{R}}\lambda_2(M_z)\,d\lambda_1(z) \;=\; \int_{\mathbb{R}}\lambda_2(K_{r(z)}(0))\,d\lambda_1(z) \;=\; \int_{\mathbb{R}}\pi r(z)^2\,d\lambda_1(z)\,.$$

Hierbei wurde die (aus der Schule bekannte) Formel $\lambda_2(K_R(0))=\pi R^2$ für die Kreisfläche benutzt, die wir in Aufgabe G1 vom 12. Übungsblatt (bzw. als Spezialfall dieser Aufgabe) noch einmal verifiziert haben.

(c) Analog zu Teil (b) erhalten wir

$$\lambda_3(M) \;=\; \pi\int_{[1,\infty[} z^{-2\alpha}\,d\lambda_1(z) \;=\; \pi\int_1^{\infty} z^{-2\alpha}\,dz\,.$$

Für $\alpha\neq\frac{1}{2}$ ist also

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \lim_{n\to\infty}\pi\int_1^n z^{-2\alpha}\,dz \\
&= \lim_{n\to\infty}\pi\left[\frac{z^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right]_1^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\pi\,\frac{n^{1-2\alpha}-1}{1-2\alpha} \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha-1} & \text{falls } \alpha>\frac{1}{2}; \\ \infty & \text{falls } \alpha<\frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Für $\alpha=\frac{1}{2}$ schließlich ist $\lambda_3(M)=\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{z}\,dz=\infty$.

(G 3) Volumen eines Rotationskörpers

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ messbar. Wir definieren in $\mathbb{R}^{n+1}$ den Rotationskörper

$$K_f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b] : \|x\| \leq f(t)\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K_f in Abhängigkeit des Volumens c_n der n-dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}_+$ durch $f(t) = |t|$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Situation im Fall $n = 2$.

LÖSUNG:

(a) Wir schneiden die Menge K_f in Scheiben entlang der t-Achse: $K_{f,t} := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, t) \in K_f\}$. Dann gilt

$$K_{f,t} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq f(t)\}, & t \in [a, b] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit dem Satz von Cavalieri erhält man

$$\lambda_{n+1}(K_f) = \int_a^b \lambda_n(K_{f,t})dt = c_n \int_a^b f(t)^n dt.$$

(b) Aus einer Skizze erkennt man, dass der 3-dimensionale Körper K_f tatsächlich durch Rotation um die x_3-Achse entsteht.

Nach (a) gilt

$$\lambda_{n+1}(K_f) = c_n \int_{-a}^a |t|^n dt = 2c_n \int_0^a t^n dt = \frac{2c_n}{n+1} a^{n+1}.$$

(G 4) Rechenaufgabe zu Flächenintegralen

Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\mathbb{S}_2} x^2\, y^2\; dS_{\mathbb{S}_2}(x, y, z).$$

LÖSUNG:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_2} x^2\, y^2\; dS_{\mathbb{S}_2}(x, y, z) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin\theta\cos\phi)^2\, (\sin\theta\sin\phi)^2\, \sin\theta\; d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^4\theta}_{=(1-\cos^2\theta)^2}\; \sin\theta\; \underbrace{\cos^2\phi\sin^2\phi}_{=\frac{1}{4}\sin^2(2\phi)=\frac{1}{8}(1-\cos(4\phi))}\; d\phi\, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\, 2\pi \int_0^\pi \left(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)\, \sin\theta\; d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} \Big[-\cos\theta + \frac{2}{3}\, \cos^3\theta - \frac{2}{5}\, \cos^5\theta \Big]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) \;=\; \frac{11}{30}\, \pi\,.
\end{aligned}$$

(G 5) Gaußscher Integralsatz

Satz (Gauß): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ äusseres Normalenfeld. Ferner sei $K \subseteq U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div} F(x) d\lambda_n(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) dS_{\partial K}(x).$$

Wir betrachten die Menge $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) := (x^2y^3,\, xz + xy^4,\, \cos(xy)).$$

(a) Zeige, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

(b) Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \langle F(x, y, z),\, \nu(x, y, z)\rangle \, dS_{\partial K}(x, y, z),$$

indem Du es als ein geeignetes Volumenintegral umschreibst; hierbei ist $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von K.

Beachte, dass wir ν gar nicht explizit ausrechnen müssen!

LÖSUNG:

(a) Offensichtlich ist K abgeschlossen und K ist beschränkt, da $|x|, |y|, |z| \leq 1$ für alle $(x, y, z) \in K$. Also ist K kompakt. Da $\partial K \subseteq U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und $K \cap U = \{(x, y, z) \in U : \psi(x, y, z) \leq 0\}$ mit $\psi : U \to \mathbb{R}$, $\psi(x, y, z) := x^2 + y^4 + z^6 - 1$ und $\operatorname{grad} \psi(x, y, z) = (2x, 4y^3, 6z^5) \neq (0, 0, 0)$ für alle $(x, y, z) \in U$, ist K ein Kompaktum mit glattem Rand.

(b) Da $\operatorname{div} F(x, y, z) = 2xy^3 + 4xy^3 = 6xy^3$, erhalten wir mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
&\int \langle F(x, y, z),\, \nu(x, y, z)\rangle \, dS_{\partial K}(x, y, z) \\
&= \int_K \operatorname{div} F(x, y, z) \, d\lambda_3(x, y, z) \;=\; \int_K 6\, xy^3 \, d\lambda_3(x, y, z) \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} \int_{-\sqrt[6]{1-x^2-y^4}}^{\sqrt[6]{1-x^2-y^4}} 6\, xy^3 \, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 12\, xy^3 \sqrt[6]{1 - x^2 - y^4} \, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[-\frac{18}{7} (1 - x^2 - y^4)^{7/6} \right]_{y=-\sqrt[4]{1-x^2}}^{y=\sqrt[4]{1-x^2}} dx \;=\; 0.
\end{aligned}$$

(G 6) Divergenz als Flussdichte

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0$ bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den sogenannten "Fluss" $\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K_r}(x)$ von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0 (wobei $\nu : \partial K_r \to \mathbb{R}^3$ jeweils das äußere Normalenfeld ist).

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} \;=\; \operatorname{div} F(x_0).$$

Hinweis: Schreiben Sie $\operatorname{div} F(x_0) = \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x_0) \, d\lambda_3(x)$.

Lösung:

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x) = \int_{K_r} \operatorname{div} F(x) \, d\lambda_3(x) \,.$$

Daher

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} - \operatorname{div} F(x_0) \right| \\
&\qquad = \left| \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x) \; d\lambda_3(x) - \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x_0) \; d\lambda_3(x) \right| \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \left| \int_{K_r} (\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)) \; d\lambda_3(x) \right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} |\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)| \; d\lambda_3(x) \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \sup\{ |\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \colon y \in K_r \} \; d\lambda_3(x) \\
&\qquad = \sup\{ |\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \colon y \in K_r \} \,.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\operatorname{div} F$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $|\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $y \in K_\delta$. Für alle $0 < r \leq \delta$ gilt nach vorigen Abschätzungen dann

$$\left| \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \; dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} - \operatorname{div} F(x_0) \right| \;\leq\; \varepsilon \,.$$

Somit ist

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \; dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} \;=\; \operatorname{div} F(x_0)$$

bewiesen.