Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 7. August 2006

Analysis IV

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Flächenberechnung mit dem Cavalierischen Prinzip

Es seien $a, b > 0$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1\}$

(a) Skizzieren Sie M für $a = 1$ und $b = 2$.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt $M_y := \{x \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen $\lambda_2(M)$ von M.

Lösung:

(a)
(b) Gegeben $y \in \mathbb{R}$ ist $M_y = \{x \in \mathbb{R} \colon (x/a)^2 \le 1 - (y/b)^2\}$. Es ist also $M_y = \emptyset$ für $|y| > b$, während für $|y| \le b$

$$M_y = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \le a\sqrt{1 - (y/b)^2}\}$$

ein Intervall der Länge $2a\sqrt{1-(y/b)^2}$ ist.

(c) Nach dem Prinzip von Cavalieri ist

$$\begin{aligned}
\lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(M_y)\, d\lambda_1(y) = \int_{[-b,b]} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{-b}^{b} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2ab\cos^2(u)\, du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ab(1+\cos(2u))\, du = \pi ab\,,
\end{aligned}$$

wobei zur Berechnung des Riemann-Integrals $y = b\sin(u)$, $dy = b\cos(u)\,du$ substituiert wurde.

(G 2) Satz von Fubini

Skizzieren sie die Fläche

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1 \text{ und } x, y \ge 0\}.$$

und berechnen Sie das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$.

Lösung:

Unter Benutzung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} \underbrace{\chi_A(x,y)}_{=\chi_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]}(x)} (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]}(x)\,(2x+y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]} (2x+y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \left[x^2+xy\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \left((1-y^2)+y\sqrt{1-y^2}\,\right) d\lambda_1(y) \\
&= \left[y-\frac{y^3}{3}-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= 1-1/3+1/3 \;=\; 1\,.
\end{aligned}
$$

(G 3) Zylinder

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mengeund $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir Definieren den *Zylinder Basis M und Kante a* durch

$$Z = \{(x,0)+t\,a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid\; x \in M,\; 0 \le t \le 1\}$$

Die Abbildung $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ $T(x,t) := (x,0)+t\,a$ bildet $M \times [0,1]$ auf Z ab. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationformel das Volumen des Zylinders Z.

LÖSUNG:

Mit der Transformationsformel folgt $\int_Z 1\, d\lambda_{n+1} = \int_{M\times[0,1]} |\det(T)|\, d\lambda_{n+1}$. Die Determinante $\det(T)$ berechnet sich zu

$$\mathrm{det\ T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{vmatrix} = \mathrm{a_{n+1}}.$$

Es folgt

$$\int_Z 1\, d\lambda_{n+1} = \int_{M\times[0,1]} |a_{n+1}| d\lambda_{n+1} = \lambda_n(M)\cdot \int_{[0,1]} |a_{n+1}| d\lambda_1(x_{n+1}) = \lambda_n(M)\cdot |a_{n+1}|$$

also $\lambda^{n+1}(M) =$"Höhe $\times$ Fläche der Basis ".

(G 4) Kugeln

(a) Berechnen Sie das Volumen der Halbkugel $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\; x^2+y^2+z^2 \le 1 z \ge 0\}$

(b) Berechnen Sie das Volumen der Kugelschale $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

Lösung:

(a) Mit Polarkoordinaten in der X, y Ebene gilt

$$H := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3\, 0 \le z \le 1,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le r \le \sqrt{1-z^2}\}.$$

Somit ergibt sich das Volumen der Halbkugel zu

$$\begin{aligned} \lambda(H) &= \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi)} \int_{[0,\sqrt{1-z^2}]} 1 \cdot r\, d\lambda_1(r) d\lambda_1(\varphi) d\lambda_1(z) \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi)} \frac{1}{2} 1 - z^2 d\lambda_1(\varphi) d\lambda_1(z) \\ &= \int_{[0,1]} 2\pi \frac{1}{2}(1-z^2) d\lambda_1(z) = 2\pi\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Mit Kugelkoordinaten gilt

$$H := \{(r\sin\vartheta\, \cos\varphi, r\sin\vartheta\, \sin\varphi, r\sin\vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mid\ 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le \vartheta \le \pi,\, 1 \le r \le 2\}.$$

Somit ergibt sich das Volumen der Kugelschale zu

$$\begin{aligned} \lambda(S) &= \int_{[1,2]} \int_{[0,2\pi)} \int_{[0,\pi]} 1 \cdot r^2\, \sin\vartheta\, d\lambda_1(\vartheta) d\lambda_1(\varphi) d\lambda_1(r) \\ &= \int_{[1,2]} \int_{[0,2\pi)} 2 \cdot r^2 \cdot\, d\lambda_1(\varphi) d\lambda_1(r) \\ &= \int_{[1,2]} 4\pi \cdot r^2 \cdot\, d\lambda_1(r) = \frac{4}{3}\pi(2^3 - 1^3) = \frac{18}{3}\pi. \end{aligned}$$

(G 5) Volumina von Kegeln

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir betrachten den Kegel $K := \{(1-t)(x,0) + t\,a \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 \le t \le 1,\ x \in M\}$ über M.

(a) Parametrisieren Sie den Kegel K durch M und $[0,1]$.

(b) Brechnen Sie das Volumen $\lambda_{n+1}(K)$.

Lösung:

(a) Wir wählen $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, (x,t) \mapsto ((1-t)(x,0) + t(a_1, \cdots a_{n+1}),$ so daß die Einschränkung $T_{|M\times[0,1]}$ eine Parametrisierungvon K ist.

(b) Die Abbildung T ist beliebig oft differenzierbar. Somit ist $K = T(M \times [0,1]$ meßbar. Weiterhin können wir o.B.d.A $a_n + 1 \ge 0$ annehmen, da das Maß bewegungsinvariant ist. Somit folgt

$$\Rightarrow \lambda^{n+1}(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n(K_t) dt,$$

wobei die Schnitte K_t durch

$$K_t = \begin{cases} \emptyset & \text{für} \quad t > a_{n+1} \text{ oder } t < 0 \\ \left(1 - \frac{t}{a_{n+1}}\right) M + \frac{t}{a_{n+1}}(a_1, \cdots a_n, 0) & \text{für} \quad 0 \le t \le a_{n+1} \end{cases}$$

gegeben sind. Das volumen des Schnittes K_t berechnet sich zu $\lambda_n(K_t) = \left(1 - \frac{t}{a_{n+1}}\right)^n \lambda_n(M)$. Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt somit

$$\begin{aligned}
\lambda^{n+1}(K) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^n(K_t)dt \\
&= \int\limits_0^{a_{n+1}} \lambda^n\Big((1-\frac{t}{n})M\Big)dt \\
&= \int\limits_0^{a_{n+q}} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \lambda_n(M)dt \\
&= \lambda_n(M) \int\limits_0^{a_{n+q}} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \\
&= \lambda_n(M) \cdot \frac{a_{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

(G 6) Berechnung einer Fläche

Es sei $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x \leq 0 \text{ oder } |y| \leq x)\big\}$.
Skizzieren Sie die Menge M und berechnen Sie ihren Flächeninhalt $\lambda_2(M)$ mit dem Prinzip von Cavalieri.

LÖSUNG:

Skizze (nur in Musterlösung im LZM):
Der Skizze sehen wir an, daß die Schnitte von M mit Parallelen zur x-Achse (und somit die Mengen M_y) etwas komplizierte Mengen sind (jedenfalls keine Intervalle). Um uns weniger Arbeit zu machen, arbeiten wir daher lieber mit den Schnitten

$$M_x := \{y \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in M\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$M_x = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } |x| > 1; \\ [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] & \text{wenn } x \in [-1,0] \text{ oder } x \in \big[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\big]; \\ [-x, x] & \text{wenn } x \in \big]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\end{cases}$$

und somit

$$\lambda_1\big(M_x\big) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |x| > 1; \\ 2\sqrt{1-x^2} & \text{wenn } x \in [-1,0] \text{ oder } x \in \big[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\big]; \\ 2x & \text{wenn } x \in \big]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\big[. \end{cases}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist folglich

$$\begin{aligned}
\lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\big(M_x\big)\, d\lambda_1(x) \\
&= \int_{[-1,0]} 2\sqrt{1-x^2}\, d\lambda_1(x) + \int_{]0,\frac{\sqrt{2}}{2}[} 2x\, d\lambda_1(x) + \int_{[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} 2\sqrt{1-x^2}\, d\lambda_1(x) \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos(2u))\, du + \big[x^2\big]_0^{\sqrt{2}/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos(2u))\, du \\
&= \pi/2 + 1/2 + \pi/4 - 1/2 = 3\pi/4\,.
\end{aligned}$$

(G 7) Volumenberechnung

Berechnen Sie das Volumen des von den Flächen

$$x+y=1\,,\quad x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=6x^2+2y^2 \quad \text{und} \quad z=0$$

eingeschlossenen Körpers K.

LÖSUNG:

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Für den Schnitt $K_{(x,y)} := \{z \in \mathbb{R} \colon (x,y,z) \in K\}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$K_{(x,y)} = \begin{cases} [0, 6x^2+2y^2] & \text{falls } (x,y) \in A; \\ \emptyset & \text{falls } (x,y) \notin A\,. \end{cases}$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri und dem Satz von Fubini erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\lambda_3(K) &= \int_A \lambda_1\big(K_{(x,y)}\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_A \lambda_1\big([0, 6x^2+2y^2]\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_A \big(6x^2+2y^2\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1-y]} (6x^2+2y^2)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big[2x^3+2xy^2\big]_{x=0}^{x=1-y}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big(2(1-y)^3+2(1-y)y^2\big)\, d\lambda_1(y) \\
&= \big[-\frac{1}{2}(1-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\big]_0^1 \\
&= 2/3-1/2+1/2 \;=\; 2/3\,.
\end{aligned}$$

Natürlich kann man mit etwas Erfahrung das fertige iterierte Integral auch sofort ohne die Zwischenschritte hinschreiben, z.B. bei der gerade gewählten Reihenfolge der Koordinaten:

$$\lambda_3(K) = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{6x^2+2y^2} 1\, dz\, dx\, dy\,.$$

(G 8) Cavilierisches Prinzip

Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2 \le 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuchen Sie eine grobe Skizze von M.

(b) Bestimmen Sie für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Schnitte

$$M_{(x,y)} \;:=\; \{z \in \mathbb{R} \colon (x,y,z) \in M\}\,.$$

(c) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ von M.

LÖSUNG:

(a) Die in der x-y-Ebene liegende Kreisscheibe $\{(x,y,0)\colon x^2+y^2\le 1\}$ ist offensichtlich in M enthalten. Wenn wir uns von $(x,y,0)$ mit $x^2+y^2\le 1$ ausgehend in z-Richtung bewegen, geraten wir für $z=\pm\sqrt{1-x^2}$ an den Rand des Zylinders Z_2 und für größeren Betrag von z aus Z_2 hinaus. Diese Ideen genügen, um eine vernünftige Skizze anzufertigen. (b) Es seien $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und $z\in\mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in M &\Leftrightarrow (x,y,z)\in Z_1 \text{ und } (x,y,z)\in Z_2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2\le 1 \text{ und } x^2+z^2\le 1.\end{aligned}$$

Somit

$$M_{(x,y)} = \begin{cases} \left[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\,\right] & \text{wenn } x^2+y^2\le 1\\ \emptyset & \text{sonst.}\end{cases}$$

Also ist $\lambda_1({}_{(x,y)}M)=2\sqrt{1-x^2}$ wenn $x^2+y^2\le 1$, andernfalls $\lambda_1(M_{(x,y)})=0$.

(c) Es sei $\mathbb{D}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Anwendung des Cavalierischen Prinzips und anschließend des Satzes von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\lambda_3(M) &= \int_{\mathbb{R}^2}\lambda_1\big(M_{(x,y)}\big)\,d\lambda_2(x,y)=\int_{\mathbb{D}}\lambda_1(M_{(x,y)})\,d\lambda_2(x,y)\\ &= \int_{[-1,1]^2}\chi_{\mathbb{D}}(x,y)2\sqrt{1-x^2}\,d\lambda_2(x,y)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\chi_{\mathbb{D}}(x,y)2\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}4(1-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

(G 9) Satz von Fubini und Konvergenzsätze

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}e^{-u}\int_0^{\infty}e^{-ux^2}\cos(\beta x)\;dxdu.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $e^{-\beta}=\int_0^\infty\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\;dx$. (Dies wird in der Funktionentheorie gezeigt.)

LÖSUNG:

Da

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}e^{-u}\int_0^{\infty}\left|e^{-ux^2}\cos(\beta x)\right|\;dxdu \;\le\; \int_{\frac{1}{n}}^{\infty}e^{-u}\int_0^{\infty}e^{-x^2/n}\;dxdu<\infty,$$

können wir nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen. Es gilt also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}e^{-u}\int_0^{\infty}e^{-ux^2}\cos(\beta x)\;dxdu &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\cos(\beta x)\;\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}e^{-u(1+x^2)}\;dudx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\;e^{-\frac{1}{n}(1+x^2)}\;dx.\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$f_n(x) = \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\; e^{-\frac{1}{n}(1+x^2)}.$$

Die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen $f(x) = \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}$ und hat als Majorante die über $(0,\infty)$ integrierbare Funktion $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\; e^{-\frac{1}{n}(1+x^2)}\; dx = \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2} = e^{-\beta}.$$