Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 03.07.2006

Analysis IV

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) zu den Voraussetzungen des Satzes von Fubini

Mache Dir klar, dass eine iterierte Integration der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

bezüglich des Lebesguemaßes mit $0 < x, y < 1$ nicht das gleiche Ergebnis liefert, wenn man die Integrationsreihenfolge vertauscht. Ist f λ^2-integrierbar über $]0,1[^2$?
Hinweis: Leite $\arctan \frac{x}{y}$ ab.

LÖSUNG:

Für $x, y > 0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Somit ist

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \frac{x}{y},$$

und es gilt

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} - 0 \, dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

und

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 -\frac{1}{1 + y^2} + 0 \, dy = [-\arctan y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Aus der Existenz der iterierten Integrale folgt also keine Gleichheit, insbesondere ist f nicht λ^2-integrierbar auf $]0,1[^2$.

(G 2) großer Umordnungssatz für Doppelreihen

Leite aus dem Satz von Fubini eine Aussage darüber her, wann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$$

gilt.

LÖSUNG:

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sei. Dann ist $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, und der Satz von Fubini besagt, dass die Gleichung

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \tag{1}$$

für alle $a_{nm} \in [0, \infty]$ gilt. Sie gilt auch für $a_{nm} \in \mathbb{C}$, falls eine der auftretenden Reihen bei Ersetzung von a_{nm} durch $|a_{nm}|$ konvergiert.
Bemerkung: Der große Umordnungssatz für Doppelreihen besagt, dass wenn eine der Reihen in (1) absolut konvergiert, die anderen Reihen der Gleichung dies auch tun.

(G 3) Satz von Fubini I

Berechne das Integral $\int_A f \, d\lambda_2$, wobei ...

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ist und

$$f(x, y) \ := \ x^2 + y^3 + 2xy^2\,;$$

(b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$ ist und

$$f(x, y) \ := \ xy - 3\cos(x + y)\,.$$

LÖSUNG:

(a) Mit dem Satz von Fubini können wir das zu berechnende Integral zu einem iterierten Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}
\int_A f \, d\lambda_2 \ &= \ \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, d\lambda_2(x, y) \\
&= \ \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\
&= \ \int_{[0,1]} \Big[x^3/3 + xy^3 + x^2y^2 \Big]_{x=0}^{x=1} d\lambda_2(y) \ = \ \int_0^1 (1/3 + y^3 + y^2)\, dy \\
&= \ \Big[y/3 + y^4/4 + y^3/3 \Big]_0^1 \ = \ 1/3 + 1/4 + 1/3 \ = \ 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_A (xy - 3\cos(x + y))\, d\lambda_2(x, y) \\
&= \ \int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \mathbf{1}_A^{[0,\pi]^2}(x, y) \cdot (xy - 3\cos(x + y))\, d\lambda_2(x, y) \\
&= \ \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi]} \underbrace{\mathbf{1}_A^{[0,\pi]^2}(x, y)}_{=\mathbf{1}_{[0,\pi-y]}^{[0,\pi]}(x)} \cdot (xy - 3\cos(x + y))\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\
&= \ \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi-y]} (xy - 3\cos(x + y))\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\
&= \ \int_{[0,\pi]} [x^2y/2 - 3\sin(x + y)]_{x=0}^{x=\pi-y}\, d\lambda_1(y) \ = \ \int_0^\pi ((\pi - y)^2 y/2 + 3\sin y)\, dy \\
&= \ \int_0^\pi (\pi^2 y/2 - \pi y^2 + y^3/2 + 3\sin y)\, dy \ = \ [\pi^2y^2/4 - \pi y^3/3 + y^4/8 - 3\cos y]_0^\pi \\
&= \ \pi^4/4 - \pi^4/3 + \pi^4/8 + 6 \ = \ \pi^4/24 + 6\,.
\end{aligned}$$

(G 4) Satz von Fubini II

Benutze ein Doppelintegral der Funktion

$$f(x,y) = y \cdot e^{-(1+x^2)y^2}$$

über $\mathbb{R}_+$, um $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ zu bestimmen.

Lösung:

Da der Integrand nicht-negativ ist, können wir bei $*$ die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2}\, dy \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx \overset{G1}{=} \frac{\pi}{4} \\
&\overset{*}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2 y^2} dx \right) y e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right) e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right)^2,
\end{aligned}$$

also gilt

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Hausübungen

(H 1) Satz von Fubini III (2 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$, wobei

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}.$$

Lösung:

Unter Benutzung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} \underbrace{\mathbf{1}_A^{[0,1]^2}(x,y)}_{=\mathbf{1}^{[0,1]}_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]}(x)} (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \mathbf{1}^{[0,1]}_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]}(x)\, (2x+y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]} (2x+y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} [x^2 + xy]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} ((1-y^2) + y\sqrt{1-y^2}\,)\, d\lambda_1(y) \\
&= [y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 \\
&= 1 - 1/3 + 1/3 \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$

(H 2) Satz von Fubini IV (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll nachgewiesen werden, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

(a) Berechne zunächst den Wert von

$$P := \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy} dx \right) dy$$

durch Entwicklung des Integranden in die geometrische Reihe und anschließende gliedweise Integration.
Hinweis: $P = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

(b) Führe in P die Substitution $u(x) = x + \frac{1}{2}y(x^2-1)$ durch und vertausche nun die Integrationsreihenfolge (warum geht das?). Berechne den Wert des so entstandenen Integrals, indem Du an geeigneter Stelle noch zweimal substituierst, zunächst $v(y) = \frac{y+u}{\sqrt{1-u^2}}$ und dann $u = -\cos 2\varphi$ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Hinweis: $(1+u)(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} = \tan\varphi$ und $P = \frac{\pi^2}{4}$

(c) Leite nun her, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

LÖSUNG:

zu (a): *Vorbemerkung:* Für $0 < x < 1, -1 < y < 1$ gilt $-1 < xy < 1$.
Integrand als geometrische Reihe: Es gilt

$$0 \le \frac{1}{1+xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (xy)^k = \lim_n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (xy)^k}_{:=f_n}.$$

Das Ziel ist nun, P mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz zu berechnen. Dazu überprüfen wir, ob $f_n \in \mathcal{M}_+$:

$$f_n(x,y) = \frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy} \ge 0$$

für alle $0 < x < 1, -1 < y < 1$. $(f_n)_n$ ist nicht monoton, aber $(f_{2n+1})_n$ ist monoton wachsend: $f_0 = 1, f_1 = 1 - xy, f_2 = 1 - xy + (xy)^2, f_3 = 1 - xy + (xy)^2 - (xy)^3 = f_1 + (xy)^2(1-xy) \ge f_1$, der Induktionsschritt lautet dann

$$f_{2n+3} = f_{2n+1} + (-1)^{2n+2}(xy)^{2n+2} + (-1)^{2n+3}(xy)^{2n+3} = f_{2n+1} + (xy)^{2(n+1)}(1-xy) \ge f_{2n+1}.$$

Somit ist der Satz von Beppo Levi anwendbar auf die Funktionenfolge $(f_{2n+1})_n \to \frac{1}{1+xy}$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy} dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \lim_n f_n dxdy \overset{B.L.}{=} \lim_n \int_0^1 \int_{-1}^1 f_n dxdy \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \int_{-1}^1 (-1)^k (xy)^k dxdy = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left[\frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} y^k \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^k + 1}{k+1} y^k dy = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k + 1}{k+1} \left[\frac{1}{k+1} y^{k+1} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{(-1)^k + 1}{(k+1)^2}}_{= \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade,} \\ 2 & k \text{ gerade.} \end{cases}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}.
\end{aligned}$$

zu (b): Substitution von $u(x) = x + \frac{1}{2}y(x^2 - 1)$ mit $\frac{du}{dx} = 1 + xy$ führt zu einem Integranden $\frac{1}{(1+xy)^2}$, in dem nun noch x durch u ersetzt werden muß. Wir formen wie folgt um:

$$\begin{aligned}(1+xy)^2 &= 1 + 2xy + (xy)^2 = 1 + 2xy + y^2(x^2-1) + y^2 \\ &= 1 + 2(x + \frac{y}{2}(x^2-1))y + y^2 = 1 + 2uy + y^2\end{aligned}$$

Somit ist

$$P = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy} dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2uy+y^2} dudy \overset{Integrand>0}{=} \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{1}{1+2uy+y^2} dydu$$

und mit $\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ und

$$\frac{1}{1+2yu+y^2} = \frac{1}{1-u^2+u^2+2yu+y^2} = \frac{1}{(1-u^2)+(u+y)^2} = \frac{\frac{1}{1-u^2}}{1+\frac{(u+y)^2}{1-u^2}} = \frac{\frac{1}{1-u^2}}{1+v^2}$$

folgt

$$\begin{aligned}P &= \int_{-1}^1 \int_{v(0)}^{v(1)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{1+v^2} dvdu = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left[\arctan v\right]_{v(0)}^{v(1)} du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1+u}{\sqrt{1+u^2}} du.\end{aligned}$$

Setzt man nun $u = -\cos 2\varphi$ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ und formt das Argument des Integranden um,

$$\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1-\cos 2\varphi}{\sqrt{1-\cos^2 2\varphi}} = \frac{1-\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \tan\varphi,$$

so erhält man wegen $\frac{du}{d\varphi} = 2\sin 2\varphi$

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 2\varphi}} \arctan\tan\varphi \cdot 2\sin 2\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{4}.$$

zu (c): Es ergibt sich also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}}_{=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

folgt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$