Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 7. August 2006

Analysis IV

10. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Monotone Konvergenz

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{M}^+$ eine Funktionenfolge die fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ konvergiert. Weiterhin sei die Folge (f_n) fast überall monoton steigend (,d.h. es gilt $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \cdots$ fast überall). Zeigen sie $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

LÖSUNG:

Es sei (X, μ) der betrachtete Maßraum. Da die Funktionenfolge f_n fast überall monoton steigen ist gibt es eine Nullmenge $N_1 \subset X$ so daß die Folge f_n auf $X \setminus N_1$ monoton steigend ist. weiterhin gibt es eine Nullmenge $N_2 \subset X$ so daß die Folge f_n auf $X \setminus N_2$ gegen die Funktion f konvergiert. Da $N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge ist, folgt

$$\begin{aligned}
\lim \int_X f_n \, d\mu &= \lim \int_{X \setminus (N_1 \cup N_2)} f_n \, d\mu \\
&= \int_{X \setminus (N_1 \cup N_2)} \lim f_n \, d\mu \\
&= \int_{X \setminus (N_1 \cup N_2)} f \, d\mu \\
&= \int_X f \, d\mu.
\end{aligned}$$

(G 2) Lemma von Fatou

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{M}^+$ eine Funktionenfolge die fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ konvergiert. Zeigen sie $\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$.

LÖSUNG:

Es sei (X, μ) der betrachtete Maßraum. Da die Funktionenfolge f_n fast überall gegen f konvergiert gibt es eine Nullmenge N, so daß f_n auf $X \setminus N$ gegen f konvergiert. Aus dem

Lemma von Fatou folgt

$$\begin{aligned}
\int_X f\,d\mu &= \int_{X\setminus N} f\,d\mu \\
&= \int_{X\setminus N} \lim f_n\,d\mu \\
&= \int_{X\setminus N} \liminf f_n\,d\mu \quad \text{da } f_n \text{ auf } X\setminus N \text{ gegen } f \text{ konvergiert} \\
&\leq \liminf \int_{X\setminus N} f_n\,d\mu \\
&= \liminf \int_X f_n\,d\mu.
\end{aligned}$$

(G 3) Integrabilität

Es sei $f \in \mathcal{M}^+$ eine integrable Funktion (,d.h. $\int f\,d\mu < \infty$). Beweisen Sie, daß die Menge $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ eine μ-Nullmenge ist.

LÖSUNG:

Wenn $M = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ keine μ-Nullmenge wäre, so gäbe es eine positive Stufenfunktion $S \leq f$, welche nicht integrabel wäre, d.h. $\int S\,d\mu = \infty$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Approximation von $\int f\,d\mu$ durch solche Stufenfuntionen.

(G 4) Parameter-abhängige Integrale/Satz von Lebesgue

Es sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq h(x)$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} f(\cdot, y)\,d\mu$$

differenizierbar ist und sich die Ableitung durch

$$g'(y) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(\bullet, y)\,d\mu$$

berechnet.

LÖSUNG:

Wir zeigen die Differenzierbarkeit von g an einer Stelle $y \in \mathbb{R}$. Wendet man den Mittelwertsatz auf die Funktion $s \mapsto f(x, y+s)$ an, so findet man ein $\vartheta_{x,s} \in [0,s]$ mit

$$\frac{1}{s}\left(f(x,y+s) - f(x,y)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\vartheta_{x,s}).$$

Da nach vorraussetzung $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\vartheta_{x,s})| \leq h(x)$ gilt, erhält man mit dem Satz über majorisierte Konvergenz (Satz von Lebesgue) für jede Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim s_n = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
g'(y) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \left(g(y+s) - g(y)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \left(f(x,y+s) - f(x,y)\right) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \vartheta_{x,s})\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \vartheta_{x,s})\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, d\mu
\end{aligned}$$

(G 5) Parameter-abhängige Integrale

Es sei μ ein endliches Maß (d.h. $\mu(\mathbb{R}) < \infty$) auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ derart, daß die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) := x$ bzgl. μ über $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(y) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \sin(xy)\; d\mu(x)$$

stetig differenzierbar ist und finden Sie die Ableitung g'.

Lösung:

Wir wollen den Satz über parameterabhängige Integrale (siehe Aufgabe 4) anwenden. Wir haben

$$g(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(y,x)\; d\mu(x)$$

mit

$$f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(y,x) := \sin(xy)\,.$$

Die Funktion f ist stetig differenzierbar; insbesondere existiert also die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \;=\; x\, \cos(xy)$$

und ist stetig. Es ist also

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\right| \;=\; |x \cos(xy)| \;\le\; |x| \;=\; h(x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad h(x) \;:=\; |x|\,.$$

Da per Voraussetzung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ bzgl. μ integrierbar ist, ist auch $h = |\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|$ bzgl. μ integrierbar. Somit sind alle Voraussetzungen von Aufgabe 4 erfüllt: Die Funktion g ist stetig differenzierbar, mit

$$g'(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\; d\mu(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} x\, \cos(xy)\; d\mu(x)\,.$$

(G 6) L^1-Räume

Es seien $f, g \in L^1$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(a) $\forall A \in \mathcal{M} \quad \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ (b) $\int_X |f - g|\, d\mu = 0$ (c) $f = g$ fast überall.

LÖSUNG:

Es sei (X, μ) der betrachtete Maßraum. Wir zeigen $(a) \Rightarrow (b)$: Wir nehmen $\int_X |f - g| \, d\mu \neq 0$ an. Dann gibt es eine nicht Nullmenge Y mit $f \neq g$ auf Y. Somit ist entweder die Menge $Y_+ = \{y \in Y \mid f(y) > g(y)\}$ oder die Menge $Y_- = \{y \in Y \mid f(y) < g(y)\}$ keine Nullmenge. Wir nehmen o.B.d.A $\mu(Y_+) \neq 0$ an. Es gilt

$$Y_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in Y \mid f(y) \geq g(y) + \frac{1}{n}\}$$

Somit muß mindestens eine der Mengen $Y_n := \{y \in Y \mid f(y) \geq g(y) + \frac{1}{n}\}$ keine Nullmenge sein. Es folgt $\int_{Y_+} f - g \, d\mu \geq \int_{Y_n} f - g \, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(Y_n) > 0$ im widerspruch zur Annahme (a).

$(b) \Rightarrow (c)$: Angenommen es gäbe eine Menge Y mit $f \neq g$ auf Y und $\mu(Y) > 0$. Analog zu oben ist mindestens eine der Mengen $Y_n := \{y \in Y \mid |f(y) - g(y)| \geq \frac{1}{n}\}$ keine Nullmenge. Es folgt $\int_Y |f - g| \, d\mu \geq \int_{Y_n} |f - g| \, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(Y_n) > 0$ im Widerspruch zur Annahme (b).

$(c) \Rightarrow (a)$: Nach Annahme gibt es eine Nullmenge N mit $f = g$ auf $X \setminus N$. Somit folgt für jede meßbare Menge A:

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\mu &= \int_{A \setminus N} f \, d\mu \\ &= \int_{A \setminus N} g \, d\mu \\ &= \int_A g \, d\mu. \end{aligned}$$

(G 7)

Es sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq r \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $L^p(X, \mu) \subseteq L^r(X, \mu)$ (b) Aus $\mu(X) < \infty$ folgt $\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$

LÖSUNG:

1. Wir nehmen zuerst $p < \infty$ an. Liegt f in $L^p(X, \mu)$, so liegt f^r in $L^{\frac{p}{r}}(X, \mu)$, denn es gilt
$$\int |f^r|^{\frac{p}{r}} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu.$$
Da der Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ endlich ist, ist auch die konstante 1-Funktion integrierbar. Wir setzen $q = 1 - \frac{r}{p}$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt
$$\int |f|^r \, d\mu = \|1 \cdot f^r\|_1 \leq \|1\|_q \cdot \|f^r\|_{\frac{p}{r}}$$
Somit ist $|f^r|$ integrabel. Für $p = \infty$ und endliche Maßräume existiert das Integral $\int \|f\|_\infty \, d\mu$ und es gilt
$$\int |f|^r \, d\mu \leq \int \|f\|_\infty^r \, d\mu,$$
da $|f|$ außerhalb einer Nullmenge kleiner als $\|f\|_\infty$ ist. Somit ist f^r integrabel.

2. Für das Nullmaß oder $\|f\|_\infty = 0$ ist die Gleichung immer erfüllt. Ist μ nicht das Nullmaß und $\|f\|_\infty \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}\lim \left(\int |f|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int \|f\|_\infty^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \lim \mu(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_\infty \\ &= 1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty\end{aligned}$$

Umgekehrt

Hausübungen

(H 1) L^p-Räume

Wir betrachten den Funktionenraum $L^p((0,1)^d)$ und die Funktionen $f(x) = |x|^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \leq p \leq \infty$ liegt f in L^p?

LÖSUNG:

Die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$ ist genau dann über $(0,1)^d$ integrierbar, wenn Sie über $(-1,1)^d$ integrierbar ist. In diesem Falle gilt $2^d \int_{(0,1)^d} f \, d\mu = \int_{(-1,1)^d} f \, d\mu$. Da Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist, ist sie über jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ interierbar, so auch über $[-1,1]^d \setminus B_1(0)$. Damit ist sie genau dann über $[-1,1]^d$ bzw. $(-1,1)^d$ integrierbar, wennn sie über die Einheitskugel $B_1(0)$ intergrierbar ist. Die Einheitskugel $B_1(0)$ läßt sich durch die Kugelschalen $B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{r}}(0)$ ausschöpfen. Ist f über $B_1(0)$ integrierbar, so ergibt sich das integral als Grenzwert der Integrale über die ausschopfenden Mengen:

$$\int_{B_1(0)} f \, d\mu = \lim \int_{B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)} f \, d\mu,$$

d.h. dieser Grenzwert existiert. Die Integrale auf der rechten Seite berechnen sich mit Hilfe der Kugelkoordinaten zu

$$\int_{B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)} f \, d\mu, = \int_{\frac{1}{n}}^1 r^\alpha \cdot C_{d-1} \cdot r^{d-1} dr,$$

wobei C_d die Fläche der $d-1$ Sphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Der Grenzwert für $n \to \infty$ existiert nur für $\alpha + d - 1 > -1$ bzw. für $\alpha > -d$.

(H 2) Der Raum L^∞

In dieser Aufgabe betrachten wir den Raum $\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$ der reellen meßbaren außerhalb einer Nullmenge beschränkten Funktionen:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R}) := \{f \mid f \text{ ist meßbar}, \exists M \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{(-1)}((M, \infty])) = 0\}.$$

Auf diesem definieren wir durch $\|f\|_\infty := \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \mu(|f|^{(-1)}((M, \infty]) = 0\}$ das *wesentliche Supremum* $\|\cdot\|_\infty$. Im folgenden betrachten wir nur Funktionen und Funktionenfolgen in $\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-fast überall.

(b) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$ und induziert eine Norm auf L^∞.

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Longrightarrow$ es existiert eine meßbare Menge A mit $\mu(A^c) = 0$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf A.

(d) $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(e) Es sei $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, \mu)$ der Lebesgue-Maßraum in $\mathbb{R}^d$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Dann ist $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ das wesentliche Supremum $\|f\|_\infty$ von f.

LÖSUNG:

(a) Aus der Definition des wesentlichen Supremums folgt $\mu(|f|^{(-1)}((M,\infty])) = 0$ für alle $M > \|f\|_\infty$. Wir setzen $X_n := |f|^{(-1)}((\|f\|_\infty + \frac{1}{n}, \infty])$. Es folgt $|f|^{(-1)}((\|f\|_\infty, \infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und somit $\mu(|f|^{(-1)}((\|f\|_\infty, \infty])) = \lim \mu(X_n) = 0$. Somit gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ außergalb der Nullmenge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $f^{-1}(M,\infty]) = (\alpha f)^{-1}((\alpha M, \infty])$. Somit folgt $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$. Die Mengen $N_1 = |f|^{(-1)}((\|f\|_\infty, \infty])$ und $N_2 := |g|^{(-1)}((\|g\|_\infty, \infty])$ sind Nullmengen. Folglich gilt $|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ außerhalb von $N_1 \cup N_2$. Aus der Definition des wesentlichen Supremums folgt $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Die positive Definitheit folgt wie im Falle der L^p-Räume.

(c)

(d)

(e)