Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 20.06.2006

Analysis IV

9. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Voraussetzungen in den neuen Sätzen

Zeige, dass die Vortaussetzungen in den neuen Sätzen wesentlich sind:
Gilt Beppo Levis Satz über monotone Konvergenz auch für monoton fallende Folgen?
Gilt der Satz auch, wenn man die Monotonie-Voraussetzung vollständig fallen läßt?
Gilt die Aussage analog zu Fatous Lemma für den Limes Superior?
Gilt Fatous Lemma für nicht nach unten beschränkte Funktionen?

(G 2) Integral bezüglich dem Zählmaß

Es sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{A}$. Zeige, dass

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

für alle $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ gilt.
Hinweis: Schreibe f als Reihe.

(G 3) Integral bezüglich dem Lebesguemaß

Berechne das Integral der Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$ bezüglich dem Lebesguemaß mit Hilfe der Definition des Integrals.

(G 4) Grenzwert von Integralen I

Existiert der Grenzwert und was ist, falls ja, sein Wert?

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin x}\, d\lambda$$

(G 5) Riemann- und Lebesgue-Integral

Die Grundidee des Riemann-Integrals ist es, den Urbildbereich einer Funktion in n gleichgroße Intervalle zu zerteilen und eine zugehörige Unter- sowie eine zugehörige Obersumme zu definieren. Falls der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme für laufendes n beliebig klein werden kann, so nennt man die Funktion Riemann-integrierbar.
Nun sagt Lebesgue: ,,Um von der Integraldefinition nach Cauchy-Riemann zu derjenigen überzugehen, die ich gegeben hat, genügt es, die Unterteilung des Definitionsintervalls der Funktion zu ersetzen duch Unterteilungen des Intervalls, in dem die Werte der Funktion liegen."
Zum Vorteil seiner Definition äußert sich Lebesgue wie folgt: ,,Man kann auch sagen, dass

man sich bei dem Vorgehen von Riemann verhält wie ein Kaufmann ohne System, der Geldstücke und Banknoten zählt in der zufälligen Reihenfolge, wie er sie in die Hand bekommt; während wir vorgehen wie ein umsichtiger Kaufmann, der sagt:

Ich habe $m(E_1)$ Münzen zu einer Krone,	das macht $1 \cdot m(E_1)$,
ich habe $m(E_2)$ Münzen zu zwei Kronen,	das macht $2 \cdot m(E_2)$,
ich habe $m(E_3)$ Münzen zu fünf Kronen,	das macht $5 \cdot m(E_3)$,
usw.,	

ich habe also $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \ldots$.
Die beiden Verfahren führen sicher den Kaufmann zum gleichen Resultat, weil er - wie reich er auch sei - nur eine endliche Zahl von Banknoten zu zählen hat; für uns, die wir unendliche viele Indivisiblen zu addieren haben, ist der Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen wesentlich." (zitiert nach Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie)

(a) Mache Dir die Äußerungen von Lebesgue anschaulich am Graphen einer Funktion klar.

(b) Zeige den folgenden Satz:
Eine beschränkte Funtion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine λ-Nullmenge ist. Dann stimmt das Riemann-Integral von f mit dem Lebesgue-Integral überein.

Hausübungen

(H 1) Integral bezüglich eines Dirac-Maßes

Gegeben eine Menge X und $x \in X$ sei $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das Dirac-Maß in x auf X. Zeige, dass

$$\int_X f \, d\delta_x = f(x)$$

für jede Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Hinweis: Nimm zuerst $f \geq 0$ an, so dass die Definition aus dem Skript anwendbar ist.

(H 2) Grenzwert von Integralen II

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} \, d\lambda.$$