Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 14. Juni 2006

Analysis IV

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Meßbare Mengen und Funktionen

(a) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Borelmenge ist. Ist die folgende Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar?

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{sonst?} \end{cases}$$

(b) Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen $X_n \in \mathcal{S}$ mit Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist meßbar (also $A \in \mathcal{S}$) genau dann, wenn $A \cap X_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(G 2) Meßbar oder nicht?

Wir betrachten die von der Menge $\mathcal{E} := \{\{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{S} := \sigma(\mathcal{E})$ auf $X := \{1,2,3,4\}$. Untersuchen Sie die Funktion $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf Meßbarkeit:

(a) $f(x) := (x-3)^2$, (b) $f(x) := |x - \frac{3}{2}|$.

(G 3) Stückweise definierte Funktionen

Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Räume sowie $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X durch meßbare Mengen A_i. Zeigen Sie, daß jede Funktion $f : X \to Y$, deren Einschränkungen $f_{|A_i} : A_i \to Y$ meßbar sind, meßbar ist.

(G 4) Eine stückweise definierte Funktion

Ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}; \\ \cos x & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar?

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten die reellen Zahlen mit der Borel-σ-Algebra. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Ist f meßbar?

(H 2) Meßbar oder nicht?

Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar ist:

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} [\frac{1}{x}] \cdot x & \text{falls } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$