Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 6. Juni 2006

Analysis IV

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Verknüpfung meßbarer Funktionen

Es seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ und $(Z, \mathcal{D})$ meßbare Räume sowie $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$ zwei meßbare Funktionen. Beweisen Sie, daß die Verknüpfung $f \circ g$ meßbar ist.

(G 2) Operationen auf meßbaren Funktionen

Wir betrachten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei meßbare Funktionen. Untersuchen sie die folgenden Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $f + g$ (b) $\min\{f, g\}$ (c) $\max\{f, g\}$ (d) $f \cdot g$ (e) $|f|$

(G 3) charakteristische Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge von X. Zeigen Sie, daß die charakteristische Funktion χ_A von A genau dann meßbar ist, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt, d.h. wenn A meßbar ist.

(G 4) Nicht meßbare Funktionen

Geben Sie ein Beispiel einer nicht meßbaren Funktion (auf $\mathbb{R}$) an.

(G 5) Zerlegung meßbaren Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann meßbar ist, wenn die Funktionen $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$ meßbar sind.

Hausübungen

(H 1) Meßbarkeit von Funktionen

Untersuchen Sie folgende reelle Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $[\bullet] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, [x] = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

(H 2) Operationen auf meßbaren Funktionen

Wir betrachten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge meßbare Funktionen. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (b) $\limsup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$