Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 30. Mai 2006

Analysis IV

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Lebesgue-Borel-Maß einiger Borelmengen

Wir betrachten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß folgenden Mengen Borelmengen sind und berechnen Sie ihr Lebesgue-Maß:

(a) $]0,1[$ (b) $[0,1]$ (c) $\{0\}$ (d) $\mathbb{Q}$ (e) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ (f) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$

(G 2) Hyperebenen

(a) Welches Maß hat die $n-1$-Fläche $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ im $\mathbb{R}^n$?

(b) Welches Maß hat die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ im $\mathbb{R}^n$?

(c) Welches Maß haben beliebige affine Ebenen geringerer Dimension im $\mathbb{R}^n$?

(G 3) Die verallgemeinerte Cantormenge

Es sei (α_n) eine Folge reeller Zahlen mit $\alpha_n \in]0,1[$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun eine Folge A_n von Teilmengen von $\mathbb{R}$. $A_0 = [0,1]$ sei das Einheitsintervall. Aus A_0 entfernen wir das offene Teilintervall der Länge α_1 mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und definieren A_1 als die Vereinigung der verblieben Intervalle $I_{1,1}$ und $I_{1,2}$. Die Mengen A_n werden nun rekursiv definiert. Haben wir A_n als vereinigung der Intervalle $I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}$ erhalten so entfernen wir aus den Intervallen $I_{n,j}$ die offenen Teilintervalle $\alpha_{n+1} I_{n,j}$, deren Mittelpunkte mit denen von $I_{n,j}$ übereinstimmen und erhalten die Menge A_{n+1} als Vereinigung der verbleibenden Intervalle $I_{n+1,1}, \ldots, I_{n,2^{n+1}}$. Den Schnitt $C = \bigcap A_n$ nennen wir eine verallgemeinerte Cantor-Menge. Beweisen sie $\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)$

(G 4) Dichte, offene Mengen von kleinem Maß

(a) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine Bijektion $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}[$$

nicht leer ist.

(b) Finden Sie zu $\varepsilon > 0$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ vom Maß $\lambda(U) \leq \varepsilon$ derart, dass U in $\mathbb{R}$ dicht ist (d.h. daß $U \cap V \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ gilt).

(G 5) Urbilder borelscher Mengen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, daß Urbilder von Borelmengen unter f wieder Borelmengen sind.

Hausübungen

(H 1) Bilder stetiger Funktionen

Zeigen Sie, daß das Bild einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ nicht immer Maß 0 hat.

Hinweis: Betrachten Sie eine Peano-Kurve.

(H 2) Etwas verzwicktere Teilmengen

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n keine 7 enthält, A die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung keine 7 enthält sowie B die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens eine 7 enthält. (Hierbei betrachten wir nur Dezimalbrüche ohne Neunerperiode).
Zeigen Sie, dass A_n, A und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß dieser Mengen.