Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 23.05.2006

Analysis IV

5. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Definitionen

(a) Gib die Definitionen der Begriffe *σ-Algebra, Maß* und *äußeres Maß* an. Falls Du sie nicht auswendig kannst, präge sie Dir ein.

(b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Eine Abbildung $\varrho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Inhalt*, falls $\varrho(\emptyset) = 0$ und für jede endliche Folge disjunkter Mengen $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A}$ gilt, dass

$$\varrho\left(\bigcup_{\imath=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varrho(A_i).$$

Gib ein Beispiel für einen Inhalt an, der nicht σ-additiv ist.

(G 2) Lebesguemaß

Sei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

(a) Finde eine nicht λ-messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Gib ein Beispiel für eine nicht abzählbare λ-Nullmenge an.

(G 3) Beweis aus der Vorlesung im Fall $n = 1$

Es bezeichne $Vol_1(a, b)$ das eindimensionale Volumen des Intervalls $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und λ_1^* das eindimensionale äußere Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\lambda_1^*((a, b)) = Vol_1(a, b) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Hausübungen

(H 1) Lebesguemaß und offene Mengen

Sei λ_1^* das eindimensionale äußere Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass offene Mengen λ_1^*-messbar sind.

(H 2) Geschichte der Maßtheorie

Recherchiere, welche Schwierigkeiten bei der Entwicklung einer Theorie zur Berechnung von Volumina und Flächen schließlich zu den Begriffen der Maßtheorie führten, wie Du sie in der Vorlesung kennengelernt hast: σ-Algebren, Maße, äußere Maße, Volumen. Notiere das Ergebnis Deiner Recherche.