Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 18. Mai 2006

Analysis IV

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Urbilder von σ-Algebren

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y. Beweisen Sie, daß das Urbild $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}(X)$ von $\mathcal{S}$ unter f eine σ-Algebra ist.

(G 2) Äußere Maße

Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X für die $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ gilt sowie $\varrho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ eine Funktion die $\varrho(\emptyset) = 0$ erfüllt. Weiterhin sei μ^* das von ϱ induzierte äußere Maß auf X.

(a) Gilt $\mu^* \leq \varrho$ auf $\mathcal{E}$?

(b) Beweisen Sie, daß für jedes äußere Maß τ auf X aus $\tau \leq \varrho$ auf $\mathcal{E}$ schon $\tau \leq \mu^*$ folgt.

(G 3) Stetigkeit von oben

Es sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ und $A_n := (0, \frac{1}{n})$ eine fallende Folge von Teilmengen. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ und $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Satz über induzierte äußere Maße ?

(G 4) Fortsetzung von Maßen

Es sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und ϱ das Zählmaß auf $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie das von ϱ induzierte äußere Maß μ^* auf $\mathbb{R}$. Wie läßt sich μ^* sinnvoll auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definieren, welche nicht durch Mengen $A_n \in \mathcal{E}$ überdeckt werden können?

(b) Finden Sie eine weitere Fortsetzung von ϱ, welche nicht mit μ^* übereinstimmt.

(G 5) Einschränkung von Maßen

Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{S}$ eine meßbare Teilmenge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}_{|Y} := \{A \in \mathcal{S} \mid A \subset Y\}$ und die Einschränkung $\mu_{|Y} := \mu_{|\mathcal{S}_{|Y}}$. Zeigen Sie, daß $(Y, \mathcal{S}_Y, \mu_{|Y})$ ein Maßraum ist.

Hausübungen

(H 1)

Bearbeiten Sie alle ungelösten Aufgaben des 3. Übungsblattes.

(H 2) Direkte Bilder von σ-Algebren

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist. Man nennt $f_*(\mathcal{S}) := \mathcal{T}$ das *direkte Bild* von $\mathcal{S}$ unter f.

(b) Bestimmen Sie das direkte Bild $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unter der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$

Hinweis: Gilt z.B. $0 \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

(H 3) Äußere Maße II

Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X für die $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ gilt sowie $\varrho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ eine Funktion die $\varrho(\emptyset) = 0$ erfüllt. Weiterhin sei μ^* das von ϱ induzierte äußere Maß auf X. In welchen Fällen gilt $\varrho = \mu^*_{|\mathcal{E}}$?