Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 09.05.2006

Analysis IV

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Monotonie

Sei Σ eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge X und $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ mit

$$\begin{array}{ll} (i) & \mu(X) = 1, \\ (ii) & \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ für } A, B \in \Sigma \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \end{array}$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) μ ist σ-additiv.

(b) μ ist stetig von unten, das heißt für alle Folgen $(A_n)_n$ mit $A_n \uparrow A$ und $A_n, A \in \Sigma$, gilt $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

(c) μ ist stetig von oben, das heißt für alle Folgen $(A_n)_n$ mit $A_n \downarrow A$ und $A_n, A \in \Sigma$, gilt $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

(d) μ ist stetig von oben in Null, das heißt für alle Folgen $(A_n)_n$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $A_n, A \in \Sigma$, gilt $\mu(A_n) \downarrow 0$.

Hinweis: Unter $A_n \uparrow A$ ist eine Folge mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ zu verstehen, unter ihrem Grenzwert $A = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$. Analog versteht man unter $A_n \downarrow A$ eine Folge mit $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcap_{\mathbb{N}} A_n$.

(G 2) Vervollständigung eines Maßraums

Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge zu Σ gehört. In diesem Fall nennt man auch μ *vollständig*. Beweise den folgenden Satz.
Satz: Es seien (X, Σ, μ) ein Maßraum, $\mathcal{N}$ das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen und

$$\begin{array}{rcl} \Sigma' & := & \{A \cup N : A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}\}, \\ \mu' : \Sigma' \to \bar{\mathbb{R}} & \text{wo} & \mu'(A \cup N) := \mu(A) \text{ für } A \in \Sigma, N \in \mathcal{N}. \end{array}$$

Dann gilt:

(a) Σ' ist eine σ-Algebra, μ' ist wohldefiniert, und (X, σ', μ') ist ein vollständiger Maßraum. μ' ist die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf Σ'.

(b) Jede vollständige Fortsetzung ϱ von μ ist eine Fortsetzung von μ'.

(G 3) Beispiel einer σ-Algebra

Wir betrachten ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ein Maß μ und definieren ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ bestehend aus all denjenigen Mengen A, für die für alle $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G existieren mit

$$F \subseteq A \subseteq G \text{ und } \mu(G \setminus F) \leq \varepsilon.$$

(a) Verschärft die Forderung $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Definition?

(b) Zeige, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der Komplementbildung ist.

(c) Sind alle abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{A}$ enthalten?

(d) Zeige, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten.

(e) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Hausübungen

(H 1) noch einmal 0-1-Maße

Zeige, dass es

(a) ein 0-1-Maß auf $([0,1], \mathcal{A})$ gibt, wenn $\mathcal{A} = \{A \subseteq [0,1] : A \text{ abzählbar oder } A^C \text{ abzählbar}\}$,

(b) kein 0-1-Maß auf $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gibt und

(b) kein 0-1-Maß auf $([0,1], \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ gibt.

Erinnerung: Sei Σ eine σ-Algebra auf der Menge X. Ein Maß μ auf Σ heißt *0-1-Maß*, wenn $\mu(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \in \Sigma$, $\mu(X) = 1$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

(H 2) Cantorsches Diskontinuum

Aus dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ wird das offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt, aus dem abgeschlossenen Rest die Intervalle $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ und $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ usw., das heißt jeweils die offenen mittleren Drittel der zusammenhängenden, abgeschlossenen Reste werden entfernt. Setzt man das Verfahren unbegrenzt fort, so erhält man als Restmenge das *Cantorsche Diskontinuum* C.

(a) Finde eine Darstellung von C.

(b) Zeige: Wenn es ein Maß λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gibt, das einem Intervall den Betrag der Differenz seiner Grenzen zuweist, so gilt $\lambda(C) = 0$.