Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 02.05.2006

Analysis IV

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1) G_δ - und F_σ -Mengen

Zeige die folgenden Behauptungen.

(a) Jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist sowohl eine G_δ- als auch eine F_σ-Menge.

(b) Jede abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ist sowohl eine G_δ- als auch eine F_σ-Menge.

(c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine F_σ-Menge.

(d) Ist A eine G_δ-Menge, so ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ eine F_σ-Menge.

(e) Ist A eine F_σ-Menge, so ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ eine G_δ-Menge.

(G 2) Linearkombinationen von Dirac-Maßen

Sei X eine Menge und Σ eine σ-Algebra auf X. Im Folgenden bezeichne δ_x das *Dirac-Maß* an der Stelle $x \in X$ mit

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

für $A \in \Sigma$.

(a) Zeige: Ist $\alpha_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \in X$, so ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ für jede σ-Algebra auf X ein Maß.

(b) Bestimme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \delta_{\frac{1}{n}}((0,1))$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(c) Auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiert $\mu : A \mapsto |A|$ das *Zählmaß*. Zeige, dass μ ein Maß ist und schreibe es als Linearkombination von Dirac-Maßen.

(G 3) Halbringe und Ringe

Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Halbring*, falls

$$\begin{array}{rl} (i) & \emptyset \in \mathcal{A}, \\ (ii) & A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, \\ (iii) & A \subseteq B \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists (C_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A} \text{ disjunkt mit } A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i. \end{array}$$

$\mathcal{A}$ heißt *Ring*, falls

$$\begin{array}{rl} (I) & A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, \\ (II) & A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}. \end{array}$$

(a) Zeige, dass jeder nichtleere Ring insbesondere ein Halbring ist, und erkläre anhand eines Beispiels, warum die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist.

(b) Sei $\mathcal{A}$ ein Ring. Für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ definiert man die sogenannte *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeige, dass die symmetrische Differenz zweier Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$ liegt.
Beweise, dass man einen Ring auch als nichtleeres Mengensystem von Teilmengen von X definieren kann, welches gegenüber der Durchschnittsbildung und gegenüber der symmetrischen Differenz abgeschlossen ist.

(c) Sei $X = \{o, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen mit Werten in $\{0, \dots, n\}$.
Für $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_k \subseteq \{0, \dots, n\}$ sei

$$Z(k; i_1, \dots, i_k; A_1, \dots, A_k) := \{x \in X : x(i_1) \in A_1, \dots, x(i_k) \in A_k\}.$$

$Z(k; i_1, \dots, i_k; A_1, \dots, A_k)$ heißt *Zylindermenge* - warum?
Zeige, dass die Menge aller Zylindermengen auf X einen Halbring darstellt.

(d) Zeige, dass der Durchschnitt von Halbringen im allgemeinen kein Halbring mehr ist, dass aber der Durchschnitt beliebig vieler Ringe wieder ein Ring ist.

Hausübungen

(H 1) eine additive, aber nicht σ-additive Abbildung

Es sei $\mathcal{A}$ die Familie aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben lassen. Die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ sei definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } (0, \varepsilon) \subseteq A \text{ existiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: μ ist endlich additiv, aber nicht σ-additiv.

(H 2) Satz von Vitali - wozu σ-Algebren?

In der Mitte des letzten Jahrhunderts beschäftigten sich viele mit der die Bestimmung von Inhalten von Flächen bzw. von Volumen von Körpern. Durch den allgemeinen Funktionsbegriff (Dirichelet, Dedekind) kam die Frage auf, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Volumina besitzen, die Frage nach Maßen. Ein wichtiger Satz stammt von 1905:
Satz von Vitali: Es gibt kein nichttriviales translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, das auf beschränkten Mengen endliche Werte annimmt.
Um ihn zu beweisen, definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

auf $\mathbb{R}$. $A_0 \subseteq (0, 1]$ sei die Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält (Auswahlaxiom!). Bezeichnet $(q_n)_n$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$, so definieren wir

$$A_n := A_0 + q_n \bmod 1 = \{x + q_n \bmod 1, x \in A_0\}.$$

(a) Wie sehen die Mengen A_n aus?

(b) Mache Dir klar, dass die Mengen A_n für verschiedene n disjunkt sind.

(c) Zeige: $(0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(d) Schließe nun, dass es kein nichttriviales translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ geben kann, das auf beschränkten Mengen endliche Werte annimmt.