Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 17.07.2006

Analysis IV

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Berechnung einiger Volumina

(a) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ des Ellipsoids $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \le 1\}$, wobei $a, b, c > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip von Cavalieri und Aufgabe G1 vom 12. Übungsblatt.

(b) Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}\}$ entsteht.

(G 2) Volumen eines Rotationskörpers

Es sei $r : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ eine messbare Funktion. Uns interessiert das Volumen des Rotationskörpers

$$M \;:=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \le r(z)\} \;=\; h^{-1}([0, \infty[)$$

mit $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := r(z) - \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_3(M) = \pi \int_{\mathbb{R}} r(z)^2 \, d\lambda_1(z)$.

(c) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen der Menge

$$M \;:=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \ge 1 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \le z^{-\alpha}\}\,.$$

(G 3) Volumen eines Rotationskörpers

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ messbar. Wir definieren in $\mathbb{R}^{n+1}$ den Rotationskörper

$$K_f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b] : \|x\| \le f(t)\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K_f in Abhängigkeit des Volumens c_n der n-dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}_+$ durch $f(t) = |t|$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Situation im Fall $n = 2$.

(G 4) Rechenaufgabe zu Flächenintegralen

Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\mathbb{S}_2} x^2\, y^2 \, dS_{\mathbb{S}_2}(x, y, z).$$

(G 5) Gaußscher Integralsatz

Satz (Gauß): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ äusseres Normalenfeld. Ferner sei $K \subseteq U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_K \mathrm{div} F(x) d\lambda_n(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) dS_{\partial K}(x).$$

Wir betrachten die Menge $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \qquad F(x, y, z) := (x^2y^3, \, xz + xy^4, \, \cos(xy)) .$$

(a) Zeige, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

(b) Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \langle F(x, y, z), \, \nu(x, y, z) \rangle \, dS_{\partial K}(x, y, z) ,$$

indem Du es als ein geeignetes Volumenintegral umschreibst; hierbei ist $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von K.

Beachte, dass wir ν gar nicht explizit ausrechnen müssen!

(G 6) Divergenz als Flussdichte

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0$ bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den sogenannten "Fluss" $\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x)$ von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0 (wobei $\nu : \partial K_r \to \mathbb{R}^3$ jeweils das äußere Normalenfeld ist).

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} \; = \; \mathrm{div} \, F(x_0) .$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathrm{div} \, F(x_0) = \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \mathrm{div} \, F(x_0) \, d\lambda_3(x)$.