Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 7. August 2006

Analysis IV

12. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Flächenberechnung mit dem Cavalierischen Prinzip

Es seien $a, b > 0$ und $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\big\}$

(a) Skizzieren Sie M für $a = 1$ und $b = 2$.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt $M_y := \{x \in \mathbb{R} \colon (x,y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen $\lambda_2(M)$ von M.

(G 2) Satz von Fubini

Skizzieren sie die Fläche

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}.$$

und berechnen Sie das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$.

(G 3) Zylinder

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mengeund $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir Definieren den *Zylinder Basis M und Kante a* durch

$$Z = \{(x,0) + t\, a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid\ x \in M,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

Die Abbildung $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ $T(x,t) := (x,0) + t\, a$ bildet $M \times [0,1]$ auf Z ab. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationformel das Volumen des Zylinders Z.

(G 4) Kugeln

(a) Berechnen Sie das Volumen der Halbkugel $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

(b) Berechnen Sie das Volumen der Kugelschale $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

(G 5) Volumina von Kegeln

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ und betrachten den Kegel $K := \{(1-t)(x,0) + t\, a \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 \leq t \leq 1,\ x \in M\}$ über M.

(a) Parametrisieren Sie den Kegel K durch M und $[0,1]$.

(b) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_{n+1}(K)$.

(G 6) Berechnung einer Fläche

Es sei $M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x \leq 0 \text{ oder } |y| \leq x)\big\}$.
Skizzieren Sie die Menge M und berechnen Sie ihren Flächeninhalt $\lambda_2(M)$ mit dem Prinzip von Cavalieri.

(G 7) Volumenberechnung

Berechnen Sie das Volumen des von den Flächen

$$x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 6x^2 + 2y^2 \quad \text{und} \quad z = 0$$

eingeschlossenen Körpers K.

(G 8) Cavilierisches Prinzip

Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuchen Sie eine grobe Skizze von M.

(b) Bestimmen Sie für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Schnitte

$$M_{(x,y)} \;:=\; \{z \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) \in M\}\,.$$

(c) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ von M.

(G 9) Satz von Fubini und Konvergenzsätze

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-u} \int_0^{\infty} e^{-ux^2} \cos(\beta x)\; dx du.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\; dx$. (Dies wird in der Funktionentheorie gezeigt.)