Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 06 03.07.2006

Analysis IV

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1) zu den Voraussetzungen des Satzes von Fubini

Mache Dir klar, dass eine iterierte Integration der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

bezüglich des Lebesguemaßes mit $0 < x, y < 1$ nicht das gleiche Ergebnis liefert, wenn man die Integrationsreihenfolge vertauscht. Ist f λ^2-integrierbar über $]0,1[^2$?
Hinweis: Leite $\arctan \frac{x}{y}$ ab.

(G 2) großer Umordnungssatz für Doppelreihen

Leite aus dem Satz von Fubini eine Aussage darüber her, wann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$$

gilt.

(G 3) Satz von Fubini I

Berechne das Integral $\int_A f \, d\lambda_2$, wobei …

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und

$$f(x,y) \; := \; x^2 + y^3 + 2xy^2 \, ;$$

(b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ ist und

$$f(x,y) \; := \; xy - 3\cos(x+y) \, .$$

(G 4) Satz von Fubini II

Benutze ein Doppelintegral der Funktion

$$f(x,y) = y \cdot e^{-(1+x^2)y^2}$$

über $\mathbb{R}_+$, um $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ zu bestimmen.

Hausübungen

(H 1) Satz von Fubini III (2 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$, wobei

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } x,y \geq 0\}.$$

(H 2) Satz von Fubini IV (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll nachgewiesen werden, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

(a) Berechne zunächst den Wert von

$$P := \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy} dx \right) dy$$

durch Entwicklung des Integranden in die geometrische Reihe und anschließende gliedweise Integration.
Hinweis: $P = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

(b) Führe in P die Substitution $u(x) = x + \frac{1}{2}y(x^2-1)$ durch und vertausche nun die Integrationsreihenfolge (warum geht das?). Berechne den Wert des so entstandenen Integrals, indem Du an geeigneter Stelle noch zweimal substituierst, zunächst $v(y) = \frac{y+u}{\sqrt{1-u^2}}$ und dann $u = -\cos 2\varphi$ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Hinweis: $(1+u)(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} = \tan\varphi$ und $P = \frac{\pi^2}{4}$

(c) Leite nun her, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.