Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 26. Juni 2006

Analysis IV

10. Übung, Extrablatt

(A 1) Die L^1-Räume

Zeige Sie, daß die Menge $L^1(\mu,\mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}, f \text{ integrierbar}\}$ ein reeller Vektorraum ist und daß das Integral auf $L^1(\mu,\mathbb{R})$ ein lineares Funktional ist, d.h. daß

$$\int f + \alpha g = \int f + \alpha \int g.$$

für alle $f, g \in L^1(\mu,\mathbb{R})$ gilt.

(A 2) L^1-Räume

Beweisen Sie, daß für alle $f \in L^1$ die Gleichung $|\int f| \leq \int |f|$ erfüllt ist.

(A 3) Youngsche Ungleichung

Es seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}_+$ positive relle Zahlen und es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q}.$$

(A 4) Höldersche Ungleichung

Es seien $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ für $i = 1, \ldots, n$. Ferner sei $1 \leq p \leq \infty$ so gewählt, daß $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$ gilt. Beweisen sie

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

(A 5) Höldersche Ungleichung

Es seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und p_θ derart gewählt, daß $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ gilt. Zeigen Sie: Für $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu)$ gilt $f \in L^{p_\theta}(X,\mu)$ sowie

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$