Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 4. Juli 2006

Analysis IV

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Monotone Konvergenz

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{M}^+$ eine Funktionenfolge die fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ konvergiert. Weiterhin sei die Folge (f_n) fast überall monoton steigend (,d.h. es gilt $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \cdots$ fast überall). Zeigen sie $\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$.

(G 2) Lemma von Fatou

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{M}^+$ eine Funktionenfolge die fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ konvergiert. Zeigen sie $\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

(G 3) Integrabilität

Es sei $f \in \mathcal{M}^+$ eine integrable Funktion (,d.h. $\int f\, d\mu < \infty$). Beweisen Sie, daß die Menge $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ eine μ-Nullmenge ist.

(G 4) Parameter-abhängige Integrale/Satz von Lebesgue

Es sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq h(x)$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} f(\cdot, y)\, d\mu$$

differenzierbar ist und sich die Ableitung durch

$$g'(y) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y}(\bullet, y)\, d\mu$$

berechnet.

(G 5) Parameter-abhängige Integrale

Es sei μ ein endliches Maß (d.h. $\mu(\mathbb{R}) < \infty$) auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ derart, daß die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) := x$ bzgl. μ über $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Zeigen Sie, daß

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) := \int_{\mathbb{R}} \sin(xy)\, d\mu(x)$$

stetig differenzierbar ist und finden Sie die Ableitung g'.

(G 6) L^1-Räume

Es seien $f, g \in L^1$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(a) $\forall A \in \mathcal{M} \quad \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ (b) $\int_X |f - g|\, d\mu = 0$ (c) $f = g$ fast überall.

(G 7)

Es sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq r \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $L^p(X,\mu) \subseteq L^r(X,\mu)$ (b) Aus $\mu(X) < \infty$ folgt $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$

Hausübungen

(H 1) L^p-Räume

Wir betrachten den Funktionenraum $L^p((0,1)^d)$ und die Funktionen $f(x) = |x|^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \leq p \leq \infty$ liegt f in L^p?

(H 2) Der Raum L^∞

In dieser Aufgabe betrachten wir den Raum $\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$ der reellen meßbaren außerhalb einer Nullmenge beschränkten Funktionen:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R}) := \{f \mid f \text{ ist meßbar}, \exists M \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{(-1)}((M,\infty])) = 0\}.$$

Auf diesem definieren wir durch $\|f\|_\infty := \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \mu(|f|^{(-1)}((M,\infty]) = 0\}$ das *wesentliche Supremum* $\|\cdot\|_\infty$. Im folgenden betrachten wir nur Funktionen und Funktionenfolgen in $\mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-fast überall.

(b) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$ und induziert eine Norm auf L^∞.

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \implies$ es existiert eine meßbare Menge A mit $\mu(A^c) = 0$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf A.

(d) $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(e) Es sei $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, \mu)$ der Lebesgue-Maßraum in $\mathbb{R}^d$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Dann ist $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ das wesentliche Supremum $\|f\|_\infty$ von f.