Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 18. Mai 2006

Analysis IV

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1) σ-Algebren

Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, daß $\{A \subseteq X \mid A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist.

(G 2) Algebren und σ-Algebren

Es sei $X \neq \emptyset$ eine nicht leere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra*, falls es folgende Bedingungen erfüllt:

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A}$ impliziert $A^c \in \mathcal{A}$,

iii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ impliziert $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra mit der Eigenschaft

$$A_j \in \mathcal{A} \text{ für alle } j \in \mathbb{N},\ A_j \cap A_k = \emptyset \text{ für } j \neq k \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A},$$

so ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

(G 3) 2. Abzählbarkeitsaxiom

Beweisen Sie, daß jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung offener Intervalle (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die dichte Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$.

(G 4) Erzeugen von σ-Algebren

Bestimmen Sie die von $\mathcal{E} := \{[0, 1]\}$ und $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ erzeugten σ-Algebren auf $\mathbb{R}$.

(G 5) Erzeugendensysteme der Borel-σ-Algebra

Zeigen Sie, daß die folgende Mengensysteme genau die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}$ erzeugen.

(a) $\mathcal{E}_1 := \{(a, b) : a < b\}$, (b) $\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a < b\}$; (c) $\mathcal{E}_3 := \{(a, b] : a < b\}$,
(d) $\mathcal{E}_4 := \{[a, b) : a < b\}$; (e) $\mathcal{E}_5 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$, (f) $\mathcal{E}_6 := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$;
(g) $\mathcal{E}_7 := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$, (h) $\mathcal{E}_8 := \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$;

(G 6) Erzeugen von σ-Algebren

Zeigen Sie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(X) \Longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(X)$.

Hausübungen

(H 1) 0-1-Maße

Ein Maß μ auf X heißt 0-1-Maß, falls es folgende Bedingungen erfüllt:

i) $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$,

ii) $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$,

iii) $\mu(X) = 1$.

Zeigen Sie, daß kein 0-1-Maß μ auf $\mathbb{N}$ existiert.

(H 2) 2. Abzählbarkeitsaxiom

Beweisen Sie ein zu G3 analoges Resultat für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. (Eine Teilmenge J von $\mathbb{R}^n$ heißt Intervall, wenn $J = \prod_{k=1}^{n} J_k$ gilt, wobei die Mengen J_k Intervalle in $\mathbb{R}$ sind).

(H 3) 0-1-Maße

Zeigen Sie, daß kein 0-1-Maß auf $[0, 1]$ existiert.