Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 17.12.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 34) (Minitest)

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.
Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Stetigkeit von f in x_0?
(Du solltest nicht länger als **10 Minuten** für den Minitest benötigen.)

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

Lösung:

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☒ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☒ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☒ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

(G 35) (Stetigkeit)

Die Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{1+x}) & \text{für } x > 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass f stetig auf $(0, \infty)$ ist und bestimme a, so dass f stetig auf $[0, \infty)$ ist.

Lösung:

Für $x > 0$ ist die Funktion f die Summe und Produkt der stetigen Funktionen, daher ist sie stetig. Als nexte rechnen wir $\lim_{x\to 0} f(x)$ aus. Es gilt für $x > 0$

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{1+x})} = -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Daraus folgt, dass f auf $[0,\infty)$ genau dann stetig ist, wenn $a = 0$ ist.

(G 36) (Folgen in $\mathbb{R}^n$ und Stetigkeit der Vektorfunktionen)

a) Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = (n,\ \frac{1}{n})^T,\ b_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{n}{1+n})^T,\ c_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2})^T,\ d_n = (\sin(\frac{n\pi}{4}),\ \cos(\frac{n\pi}{4}))^T.$$

1) Skizziere diese Folgen und entscheide welche von ihnen beschränkt sind.

2) Welche dieser Folgen sind konvergent und welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

b) Skizziere die zu den folgenden Vektorfunktionen $F(t) = (F_1(t), F_2(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gehörenden Punktmengen $\{(F_1(t), F_2(t)) \subset \mathbb{R}^2,\ t \in D(F)\}$. Sind diese Vektorfunktionen stetig?

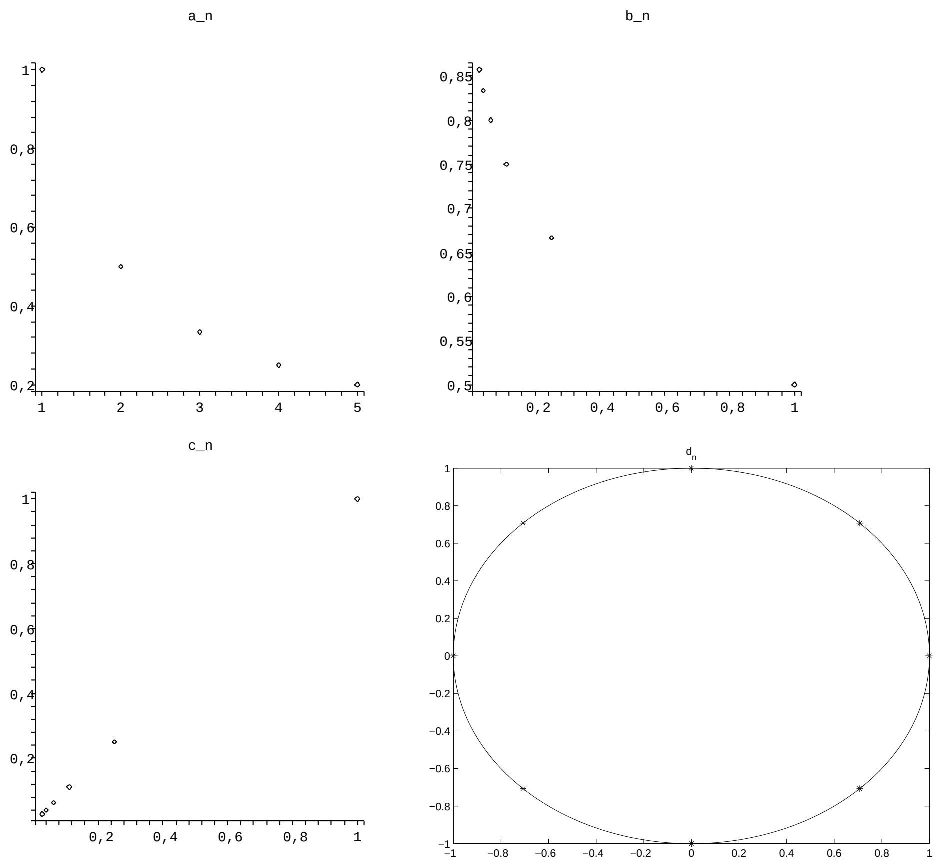
1) $F(t) = A + Bt,\ t \in [0,1]$ mit $A, B \in \mathbb{R}^2$,

2) $F(t) = (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0,\pi]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,

3) $F(t) = (\mathrm{sgn} t, \mathrm{sgn} t),\ t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) 1)



Die Folge (a_n) ist nicht beschränkt, denn es gilt

$$\|a_n\| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{n^2} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen $(b_n), (c_n)$ und (d_n) sind beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
\|b_n\| &= \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{n^2}{(1+n)^2}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
\|c_n\| &= \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2} \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
\|d_n\| &= \sqrt{\cos^2(\frac{n\pi}{4}) + \sin^2(\frac{n\pi}{4})} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

2) (a_n) ist nicht beschränkt, also auch nicht konvergent.
   (b_n) konvergiert gegen $\binom{0}{1}$.
   (c_n) konvergiert gegen $\binom{0}{0}$ (Nullfolge).
   (d_n) konvergiert nicht. Begründung: Eine Teilfolge der ersten Komponente: $(d_1^{(4n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Diese ist bekanntermaßen nicht konvergent. Also kann auch $(d_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(d^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent sein.

b) 1) Durch $F(t)$ ist ein Geradenstück mit Endpunkten A und B gegeben. Diese Funktion ist stetig, da F_1 und F_2 für alle $t \in [0,1]$ stetig sind.

   2) Durch $F(t)$ ist der obere Ast der Ellipse mit Halbachsen a und b beschrieben. Stetigkeit dieser Funktion folgt aus demselben Argument, wie in 1).

   3) Die zur $F(t)$ gehörende Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ sind 3 Punkte $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$. Diese Funktion ist nicht stetig, da keine von den Funktionen F_1, F_2 stetig ist.

Hausübungen

(H 35) (Funktionengrenzwert)

(4+2+3P)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

gegeben.

a) Zeige, dass für $\alpha \leq 0$ keine Funktionsgrenzwert für $x \to 0$ existiert.

b) Zeige, dass für $\alpha > 0$ ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig.

c) Für welche α existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$? Bestimme für diese α den Grenzwert.

Lösung:

a) Wenn $\alpha \leq 0$ ist, setzen wir $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ und bekommen

$$\begin{aligned} x_n^\alpha \sin \frac{1}{x_n} &= \left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right)^\alpha \sin \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right)^\alpha (-1)^n = ((2n+1)\frac{\pi}{2})^{-\alpha}(-1)^n. \end{aligned}$$

Diese Folge divergiert, da $-\alpha \geq 0$ ist.

b) Wenn $\alpha > 0$ ist, dann ist $|x^\alpha \sin(\frac{1}{x})| \leq |x^\alpha| \xrightarrow{x\to 0} 0$.

D.h. für alle $\alpha > 0$ ist der Grenzwert immer 0.

c) Es gilt

$$\frac{1}{x}(f(x) - f(0)) = \frac{1}{x}(x^\alpha \sin \frac{1}{x} - 0) = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist (nach a) und b)), und der Grenzwert ist gleich 0.

(H 36) (Fehlerabschätzung)

(5P)

In einer Messung wurden die Grössen a, b und c zu $a = 2$, $b = 4$ und $c = 3$ bestimmt; dabei liegt der maximal mögliche (absolute) Fehler von a bei ± 0.5, von b bei ± 0.2 und von c bei $-0.5, +0.2$. Die Werte werden in die Funktion

$$f(a, b, c) = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 3} \sqrt{\frac{2}{c} + 4}$$

eingesetzt. Bestimme den Wert sowie die Fehlerschranken von $f(a, b, c)$.

Hinweis: Zerlege die Funktion in einer Verkettung von Teilfunktionen und nutze zur Bestimmung der Fehlerschranken die Monotonie dieser Teilfunktionen.

Lösung:

Die Funktion f ist aus Funktionen zusammengesetzt, die in der Nähe der Messwerte streng monoton sind; wir nutzen diese Monotonie im folgenden zur Berechnung des maximalen Fehlers aus.

Wir betrachten zunächst a^2+1. Die Teilfunktion ist in der Nähe von $a = 2$ streng monoton wachsend, also ergibt sich als kleinster Wert $1.5^2+1 = 3.25$, als grösster Wert $2.5^2+1 = 7.25$. Für $b^2 + 3$ gilt eine ähnliche Argumentation: Der kleinste Wert ist $3.8^2 + 3 = 17.44$, der grösste $4.2^2 + 3 = 20.64$. Bei $\frac{2}{c} + 4$ hat man streng monoton fallendes Verhalten, also liegt der kleinste Wert bei $\frac{2}{3.2} + 4 = 4.625$, der grösste bei $\frac{2}{2.5} + 4 = 4.8$. Da die Funktion der Kehrwertbildung zwischen 17.44 und 20.64 streng monoton fallend ist, hat man den kleinsten Wert von $\frac{1}{b^2+3}$ bei $\frac{1}{2.64}$, den grössten bei $\frac{1}{17.44}$. Die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend, also liegtder kleinste Wert von $\sqrt{\frac{2}{c}+4}$ bei $\sqrt{4.265}$, der grösste bei $\sqrt{4.8}$. Da ein Produkt $x \cdot y \cdot z$ aus positiven Zahlen maximal ist, wenn alle Zahlen maximal sind, und minimal, wenn alle Zahlen minimal sind, liegt der Minimalwert von $f(a, b, c)$ bei $\frac{3.25}{20.64}\sqrt{4.625} \approx 0.338633202$, der Maximalwert bei $\frac{7.25}{17.44}\sqrt{4.8} \approx 0.910777189$. Wenn man a, b, c wie gemessen einsetzt, ergibt sich $\frac{5}{19}\sqrt{\frac{14}{3}} \approx 0.568486026$.

(H 37) (Grenzwert einer Funktion)

(3+3P)

Gegeben seien die Funktionen $f_1 = \frac{|x+1|+x+1}{|x^2-1|}$ und $f_2(x) = \sqrt{x^2+4x+4} - x - 2$ mit $D(f_1) = R \setminus \{-1, 1\}$ und $D(f_2) = \mathbb{R}$. Untersuche, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte (eigentliche oder uneigentliche) existieren und berechne diese im Falle der Existenz.

a) $\lim_{x\to x_0} f_1(x),\ x_0 \in \{-1, 1, -\infty, +\infty\}$.

b) $\lim_{x\to x_0} f_2(x),\ x_0 \in \{-2, -\infty, +\infty\}$.

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x > -1 \\ -x-1, & x \le -1. \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & |x| \ge 1 \\ -x^2+1, & |x| < 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -\frac{2}{x-1}, & |x| < 1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to -1^-} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to -1^+} f_1(x) = 1.$$

Daher existiert $\lim_{x\to -1} f_1(x)$ nicht. Es gilt

$$\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} f_1(x) = +\infty.$$

Daraus folgt, dass $\lim_{x\to 1} f_1(x) = +\infty$ als uneigentliche Grenzwert existiert. Die Grenzwerte $\lim_{x\to -\infty} f_1(x),\ \ \lim_{x\to +\infty} f_1(x)$ existieren und

$$\lim_{x\to -\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0.$$

b) Es gilt

$$f_2(x) = |x+2| - x - 2 = \begin{cases} 0, & x \geq -2 \\ -2x - 4, & x < -2. \end{cases}$$

Die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to -2^-} f_2(x) = \lim_{x \to -2^+} f_2(x) = 0,$$

woraus folgt, dass $\lim_{x \to -2} f_2(x)$ existiert und gleich 0 ist. Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} f_2(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty.$$