Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 26.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 28)

Wir wollen die Funktionen $re^{\jmath(\omega t+\varphi)}$, $t \in [0,1]$, betrachten.

a) Skizzieren Sie die Kurven für

$$(r,\omega,\varphi) = (1,\omega,0) \text{ (rot) },\ (2,\omega,\frac{2\pi}{8}) \text{ (blau)},$$

jeweils eine Skizze für $\omega = 2\pi$ und eine für $\omega = 4\pi$.
Markieren Sie auch jeweils in den zugehörenden Farben die Orte für $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$.

b) Tragen Sie für die beiden Diagramme aus a) die Realteile der Kurven in jeweils ein Diagramm ein.

LÖSUNG:

Siehe die beiden Abbildungen.

(G 29) Überlagerung von Schwingungen

a) Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(t) = 2e^{\jmath 2\pi t},\ g(t) = e^{\jmath(2\pi t+\frac{\pi}{2})}.$$

Skizzieren Sie deren Bahnkurven, sowie die Bahnkurve der Summenfunktion $f(t) + g(t)$. Tragen Sie außerdem die zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$ gehörigen Funktionswerte (komplexen Zeiger) ein.

b) Zeichnen Sie nun die Bahnkurve zu der Funktion $f(t)$, die durch folgende komplexe Linearkombination von sin und cos gegeben ist:

$$f(t) = z_1 \cos(\pi t) + z_2 \sin(\pi t), \qquad \text{mit } z_1 = 1, z_2 = \frac{\jmath}{3}.$$

Tragen Sie die zu den Paramterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ gehörigen Punkte ein.
Was geschieht, wenn man z_2 durch $\frac{1}{3\jmath}$ ersetzt?

c) Skizzieren Sie nun die Bahnkurve der Funktion

$$f(t) = 2e^{\jmath\pi t} + e^{-\jmath(\pi t+\frac{\pi}{2})}.$$

Tragen Sie wieder die Punkte zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ ein.

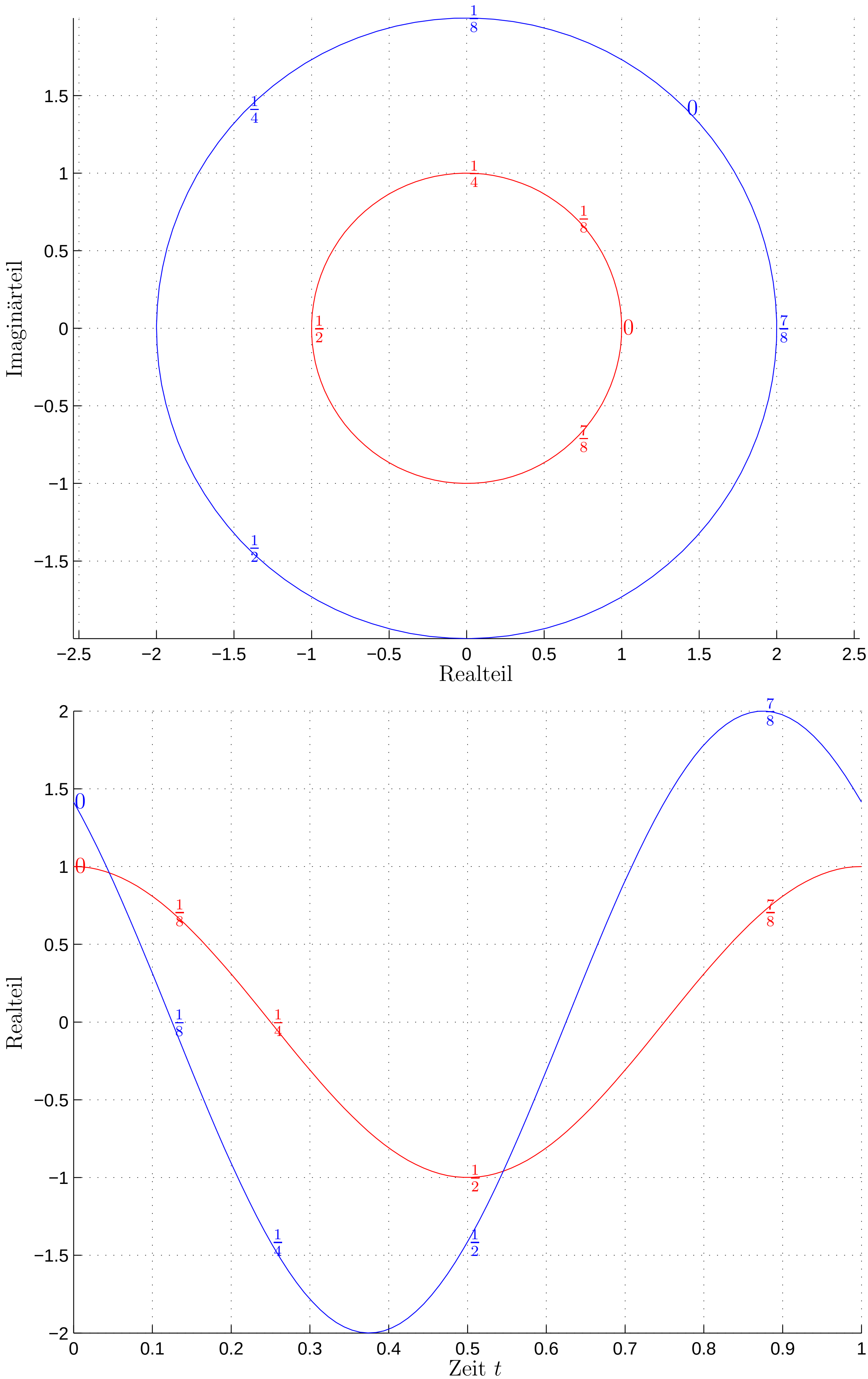


Abbildung 1: Kurven für $\omega = 2\pi$.

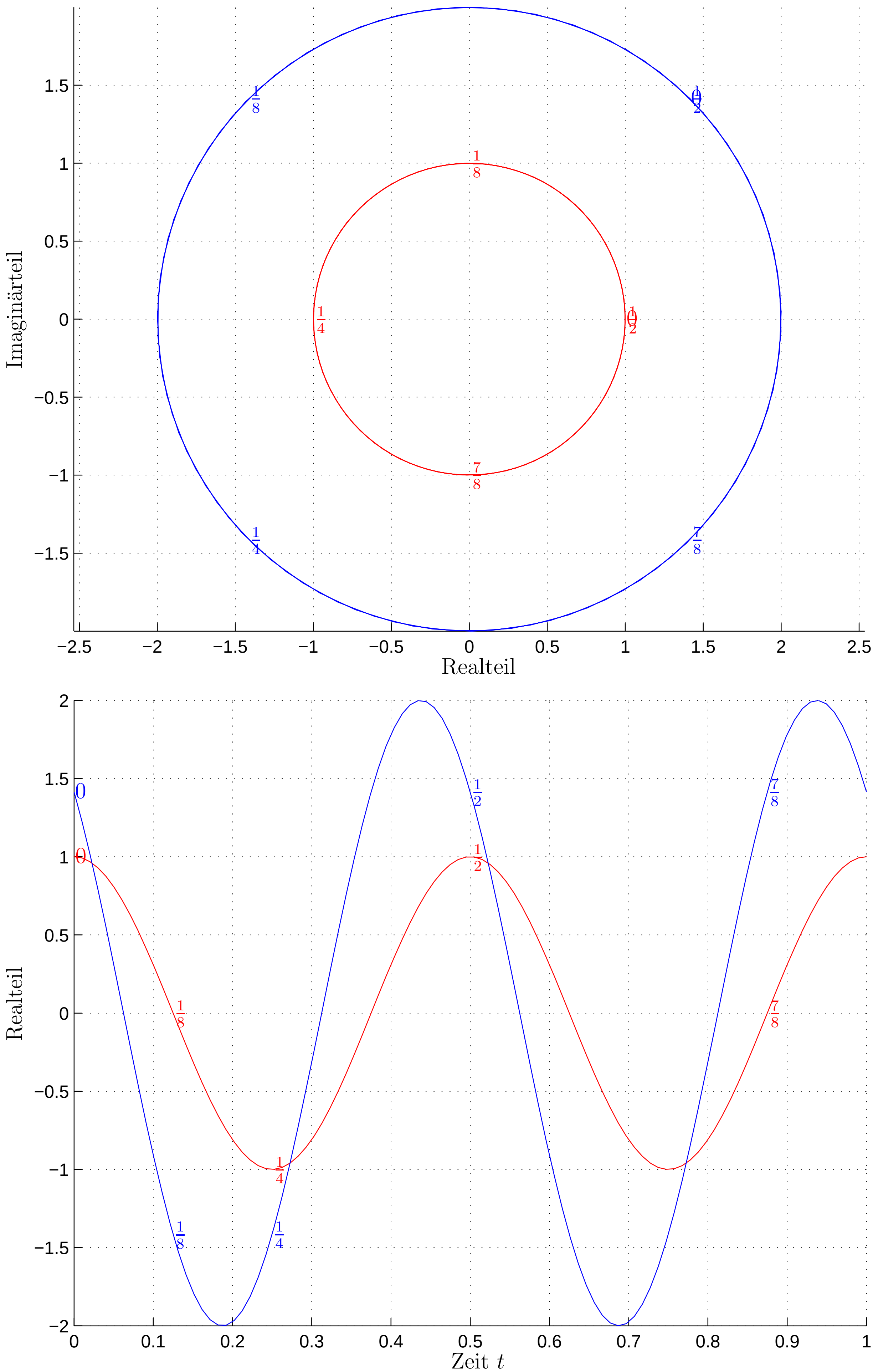


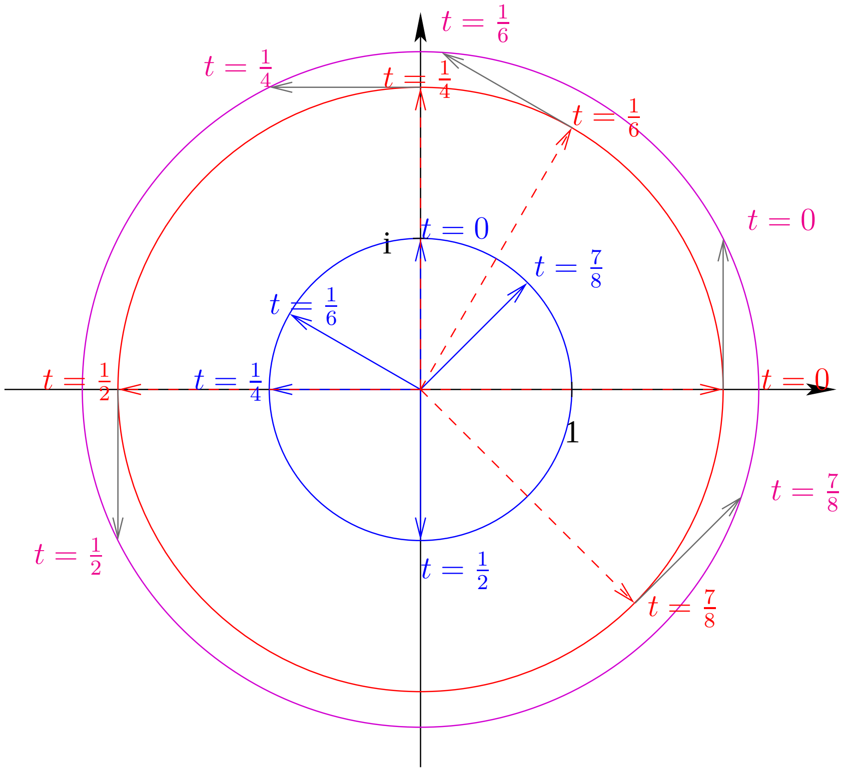
Abbildung 2: Kurven für $\omega = 4\pi$.

Lösung:

a) Die beiden Bahnkurven sind jeweils Kreise mit Radius 1 und 2. Die Zeiger sind jeweils um $\pi/2$ zueinander phasenverschoben. Die Zeiger der Summenfunktion haben Betrag

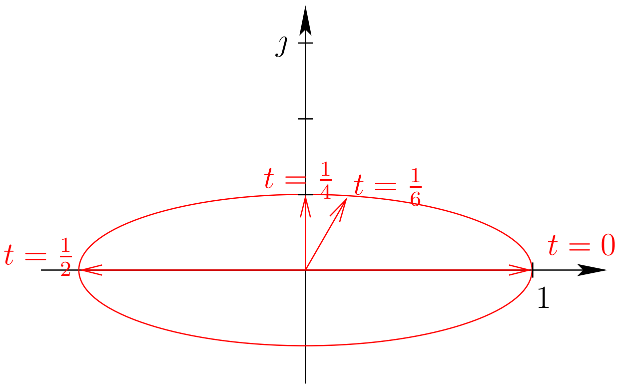
$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

und sind jeweils um eine Phase von $\phi = \arctan(\frac{1}{2})(\approx 26,57°)$ gedreht.



b) Die Bahnkurve ist eine Ellipse mit Halbachsen 1 und $\frac{1}{3}$. Man kann das Bild als das Ergebnis der Stauchung eines Kreises um ein Drittel entlang der imaginären Achse auffassen.

Ersetzt man z_2 durch $\frac{1}{\jmath 3} = -\jmath\frac{1}{3}$, wird die Stauchung zusätzlich mit einer Spiegelung an der reellen Achse verknüpft. Die Bahnkurve geht dabei in sich selbst über, wird jedoch im umgekehrten Drehsinn durchlaufen (Zeitumkehr der Schwingung).



c) Die Bahnkurve ist eine Ellipse. Nach der Formel aus dem Skript liegen deren Hauptachse bei

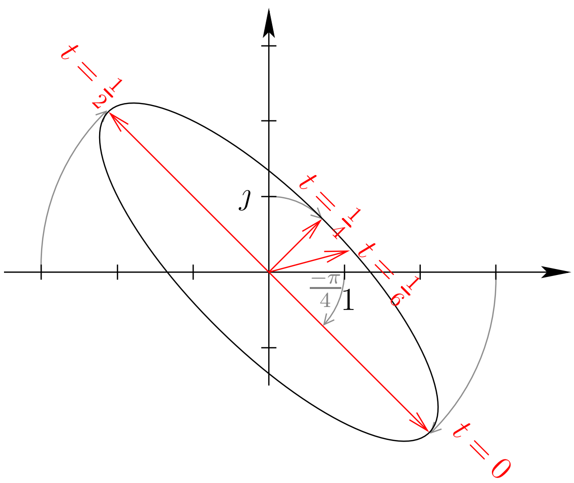
$$\omega t = \pi t = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \rightsquigarrow \; t = -\frac{1}{4} \qquad \text{und}$$

$$\omega t = \pi t = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \; t = +\frac{1}{4}.$$

(**Achtung:** *Im Skript ist die Formel für* $f(t) = re^{\jmath(\omega t+\phi)} + se^{-\jmath(\omega t-\psi)}$ *angegeben. Daher hat man hier* $-\frac{\pi}{2}$*.*)
Nach Einsetzen von $t = -\frac{1}{4}$ erhält man

$$\begin{aligned} f\left(-\tfrac{1}{4}\right) &= 2\exp\left(-\jmath\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\jmath\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \jmath\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \Rightarrow \qquad \arctan\frac{2\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{-2\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}} &= \arctan\frac{2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{-2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \arctan\frac{3\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Die Hauptachsen sind also um einen Winkel von $-\frac{\pi}{4}$ zu den Koordinatenachsen gedreht. Sie haben jeweils die Längen $1+2=3$ und $2-1=1$.



(G 30) Inversion am Kreis

Betrachten Sie die gebrochenrationale Abbildung

$$f: \ z \mapsto \frac{1}{z},$$

die Inversion am Einheitskreis.

a) Zeigen Sie, dass die Inversion Kreislinien um den Ursprung in ebensolche Kreislinien überführt.

b) Gegeben ist die Gerade $g: \ z_1 + \lambda \cdot z_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $z_1 = 3 + \frac{2}{7}\jmath$ und $z_2 = \jmath$. Zeichnen Sie das Bild dieser Gerade unter Inversion.

c) Auf einer Kreislinie K liegen die drei Punkte $-\jmath$, $\frac{\jmath}{3}$, $\frac{1}{6}(1+\jmath)$. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kreislinie $f(K)$, auf die K abgebildet wird.
Hinweis: Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

LÖSUNG:

a) Ein Kreis K mit dem Ursprung als Mittelpunkt lässt sich als die Menge

$$K = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| = r\}$$

beschreiben, mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also gilt

$$z \in K \ \Leftrightarrow \ |z| = r \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \ \Leftrightarrow \ |f(z)| = \frac{1}{r}.$$

Es folgt, dass das Bild, $f(K)$, ebenfalls eine Kreislinie ist. Ihr Radius beträgt $\frac{1}{r}$:

$$f(K) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = \frac{1}{r} \right\}.$$

LÖSUNGSALTERNATIVE: Man beschreibt K nicht über den Betrag, sondern über die Polardarstellung:

$$K = \{re^{\jmath\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\} \;\Rightarrow\; f(K) = \{\frac{1}{r}e^{-\jmath\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{da } (e^{\jmath\pi})^{-1} = e^{-\jmath\phi}.$$

Auch dies ist wieder eine Kreislinie der behaupteten Art.

b) Die Gerade g ist senkrecht zur reellen Achse und schneidet diese im Punkt 3. Das Bild dieser Geraden ist also eine Kreislinie, die den Ursprung enthält, vom Radius $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ um den Punkt $\frac{1}{6}$.

c) Wir errechnen zunächst die Bilder der drei gegebenen Punkte unter Inversion und bezeichnen sie mit w_1, w_2 und w_3:

$$w_1 := \frac{1}{-\jmath} = \jmath,\; w_2 := \frac{1}{\jmath/3} = -3\jmath,\; w_3 := \left(\frac{1}{6}(1+\jmath)\right)^{-1} = +3 - 3\jmath.$$

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des durch diese drei Punkte gebildeten Dreiecks ist der gesuchte Kreismittelpunkt. Zwei der Mittelsenkrechten lassen sich besonders leicht beschreiben, da die zugehörigen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen:

$$\begin{aligned} m_{12} &: -\jmath + 1 \cdot \lambda && (\lambda \text{ durchläuft } \mathbb{R}), \\ m_{23} &: \frac{3}{2} + \jmath \cdot \mu && (\mu \text{ durchläuft } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt w_0 ist offenbar gleich $-\jmath + \frac{3}{2}$. Der Radius des gesuchten Kreises um diesen Punkt ist

$$\left|w_0 - w_1\right| = \left|(-\jmath + \frac{3}{2}) - \jmath\right| = \left|-2\jmath + \frac{3}{2}\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Hausübungen

(H 29) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum (1+5+3+2 Punkte)

$\mathbb{C}$ kann mit der Basis $1, \jmath$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden - daher rührt die kartesische Darstellung $a+b\jmath$ der komplexen Zahlen. Wir wollen hier einige Isometrien (das sind Abbildungen, unter welchen Längen erhalten bleiben) und Streckungen des $\mathbb{R}^2$ ihren komplexen Entsprechungen gegenüberstellen.

a) Eine Verschiebung wird auch als *Translation* bezeichnet. Bestimmen Sie die Translation, bei welcher $\vec{0}$ in einen beliebigen Punkt P mit Ortsvektor $\vec{P} = \binom{P_1}{P_2}$. verschoben wird. Das Symbol "$\mapsto$" bedeutet "wird abgebildet auf".

b) Welche Abbildungen entsprechen der Streckung/Stauchung um einen Faktor a? Welche Abbildung entspricht der Drehung um den Ursprung um den Winkel φ? Überlegen Sie sich bei der Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich zuerst, wohin dabei die Basisvektoren der kanonischen Basis abgebildet werden und geben Sie dann die Matrix an.
Wie kann eine Drehstreckung – Streckung um a, Drehung um φ – beschrieben werden? Umgekehrt: was macht die Multiplikation mit $1 - \sqrt{3}\jmath$ geometrisch?
($*$) Was haben diese drei Typen komplexer Abbildungen gemeinsam und worin unterscheiden sie sich?

c) Welche Abbildungen entsprechen der Spiegelung an der reellen Achse in $\mathbb{C}$? Welche Abbildungen entsprechen in $\mathbb{R}^2$ der Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit Richtungsvektor $\binom{\sqrt{3}}{-1}$?
Tip: Schalten Sie eine geeignete Drehung vor und nach die vorherige Spiegelung.

d) Welche dieser Abbildungen sind $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-linear?

Abbildung	**in $\mathbb{C}$**	**in $\mathbb{R}^2$**
Translation $\vec{0} \mapsto \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$	$f(z) = z + P_1 + P_2\jmath$	$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{P}$
Streckung um Faktor a	$f(z) = az,\ a \in \mathbb{R}$	$f(\vec{x}) = a\vec{x},\ a \in \mathbb{R}$
Drehung um $\vec{0}$, $\angle\varphi$	$f(z) = e^{\varphi\jmath}z$	$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\vec{x}$
Drehstreckung: Faktor r, $\angle\varphi$	$f(z) = r \cdot e^{\varphi\jmath}z$	$f(\vec{x}) = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\vec{x}$
Spiegelung an x-Achse	$f(z) = z^*$	$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$
Spiegelung an $g : \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$	$f(z) = z^* e^{-\frac{1}{3}\pi\jmath}$	$f(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$

a) Siehe Tabelle.

b) Siehe Tabelle. Multiplikation mit $1 - \sqrt{3}\jmath = 2e^{\frac{1}{3}\pi\jmath}$ bedeutet eine Drehung um $-\pi/3$ und Streckung um den Faktor 2. Alle drei Abbildungen sind im Komplexen vom Typ $f(z) = az$. Im ersten Fall ist $a \in \mathbb{R}$, im zweiten $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$, im dritten $a \in \mathbb{C}$ beliebig.

c) Es ist $\arg(-\jmath + \sqrt{3}) = -\frac{1}{6}\pi$, also ist die komplexe Darstellung

$$f(z) = \left(ze^{\frac{1}{6}\pi\jmath}\right)^* e^{-\frac{1}{6}\pi\jmath} = e^{-\frac{1}{3}\pi\jmath}z^*.$$

In $\mathbb{R}^2$ ergibt sich mit $T_\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ und Hintereinanderausführen von Matrizenabbildungen

$$T_{\frac{1}{6}\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T_{-\frac{1}{6}\pi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

d) Außer bei Verschiebung um den Nullvektor ist keine Translation linear, Drehstreckungen sind $\mathbb{C}$-linear (somit auch $\mathbb{R}$-linear), die Spiegelungen sind nur $\mathbb{R}$-linear.

(H 30) (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = r\big(\cos\phi + \jmath\sin\phi\big)$ die Polardarstellung von z^*.
b) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = r\big(\cos\phi + \jmath\sin\phi\big)$ die Polardarstellung von $\frac{1}{z}$.
c) Zeigen Sie folgende Formel für dreifache Winkel

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

d) Weisen Sie nach, dass für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt

$$\mathtt{Re}(z_1 \cdot z_2^*) = \big\langle (\mathtt{Re}z_1, \mathtt{Im}z_1)^t \mid (\mathtt{Re}z_2, \mathtt{Im}z_2)^t \big\rangle,$$

wobei $\langle\ |\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf dem euklidischen $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

LÖSUNG:

a) $z^* = r\big(\cos\phi - \jmath\sin\phi\big)$.

b)

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{r\big(\cos\phi - \jmath\sin\phi\big)}{r^2} = \frac{1}{r}\big(\cos\phi - \jmath\sin\phi\big).$$

c)

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \mathtt{Im}\left(e^{\jmath 3\alpha}\right) = \mathtt{Im}\left(\left(e^{\jmath\alpha}\right)^3\right) \\
&= \mathtt{Im}\left(\big(\cos\alpha + \jmath\sin\alpha\big)^3\right) \\
&= \mathtt{Im}\left(\cos^3\alpha + 3\jmath\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\cos\alpha\jmath^2\sin^2\alpha + \jmath^3\sin^3\alpha\right) \\
&= \mathtt{Im}\left(\cos^3\alpha + 3\jmath\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - \jmath\sin^3\alpha\right) \\
&= 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathtt{Re}(z_1 \cdot z_2^*) = \mathtt{Re}\big(\mathtt{Re}z_1\mathtt{Re}z_2^* - \mathtt{Im}z_1\mathtt{Im}z_2^* + \jmath(\mathtt{Re}z_1\mathtt{Im}z_2^* + \mathtt{Re}z_2\mathtt{Im}z_1)\big) &= \mathtt{Re}z_1\mathtt{Re}z_2^* - \mathtt{Im}z_1\mathtt{Im}z_2^* \\
&= \mathtt{Re}z_1\mathtt{Re}z_2 + \mathtt{Im}z_1\mathtt{Im}z_2 = \big\langle (\mathtt{Re}z_1, \mathtt{Im}z_1)^t \mid (\mathtt{Re}z_2, \mathtt{Im}z_2)^t \big\rangle.
\end{aligned}$$

(H 31) 2x2 Inverse (1+2 Punkte)

Es seien

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, einmal mittels der Formel für die Inverse einer 2x2-Matrix im Skript und einmal, indem Sie $SS = E,\ T_\varphi T_{-\varphi} = E = T_{-\varphi}T_\varphi$ nachweisen, dass

$$S = S^{-1}, \quad T_\varphi^{-1} = T_{-\varphi}$$

gilt.

LÖSUNG:

Mit der Formel für die 2×2-Inverse: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det S = -1$, also

$$S^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S.$$

Weiter ist $\det T_\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, wegen $\cos\varphi = \cos(-\varphi),\ \sin\varphi = -\sin(-\varphi)$ gilt

$$T_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = T_{-\varphi}.$$

Durch Nachweis von $AB = E = BA$: Es ist $S^2 = E$ also $S^{-1} = S$. Weiterhin gilt. mit $c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi$,

$$T_\varphi T_{-\varphi} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & cs - sc \\ sc - cs & s^2 + c^2 \end{pmatrix} = E.$$

Ersetzen von φ durch $-\varphi$ zeigt auch $T_{-\varphi}T_\varphi = E$.