



Mathematik I für ET, WI(ET), SpInf, iSt, BEEd.ET, CE

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 28)

Wir wollen die Funktionen $re^{j(\omega t + \varphi)}$, $t \in [0, 1]$, betrachten.

a) Skizzieren Sie die Kurven für

$$(r, \omega, \varphi) = (1, \omega, 0) \text{ (rot)}, (2, \omega, \frac{2\pi}{8}) \text{ (blau)},$$

jeweils eine Skizze für $\omega = 2\pi$ und eine für $\omega = 4\pi$.

Markieren Sie auch jeweils in den zugehörigen Farben die Orte für $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$.

b) Tragen Sie für die beiden Diagramme aus a) die Realteile der Kurven in jeweils ein Diagramm ein.

LÖSUNG:

Siehe die beiden Abbildungen.

(G 29) Überlagerung von Schwingungen

a) Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(t) = 2e^{j2\pi t}, g(t) = e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{2})}.$$

Skizzieren Sie deren Bahnkurven, sowie die Bahnkurve der Summenfunktion $f(t) + g(t)$. Tragen Sie außerdem die zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$ gehörigen Funktionswerte (komplexen Zeiger) ein.

b) Zeichnen Sie nun die Bahnkurve zu der Funktion $f(t)$, die durch folgende komplexe Linearkombination von sin und cos gegeben ist:

$$f(t) = z_1 \cos(\pi t) + z_2 \sin(\pi t), \quad \text{mit } z_1 = 1, z_2 = \frac{j}{3}.$$

Tragen Sie die zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ gehörigen Punkte ein.
Was geschieht, wenn man z_2 durch $\frac{1}{3j}$ ersetzt?

c) Skizzieren Sie nun die Bahnkurve der Funktion

$$f(t) = 2e^{j\pi t} + e^{-j(\pi t + \frac{\pi}{2})}.$$

Tragen Sie wieder die Punkte zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ ein.

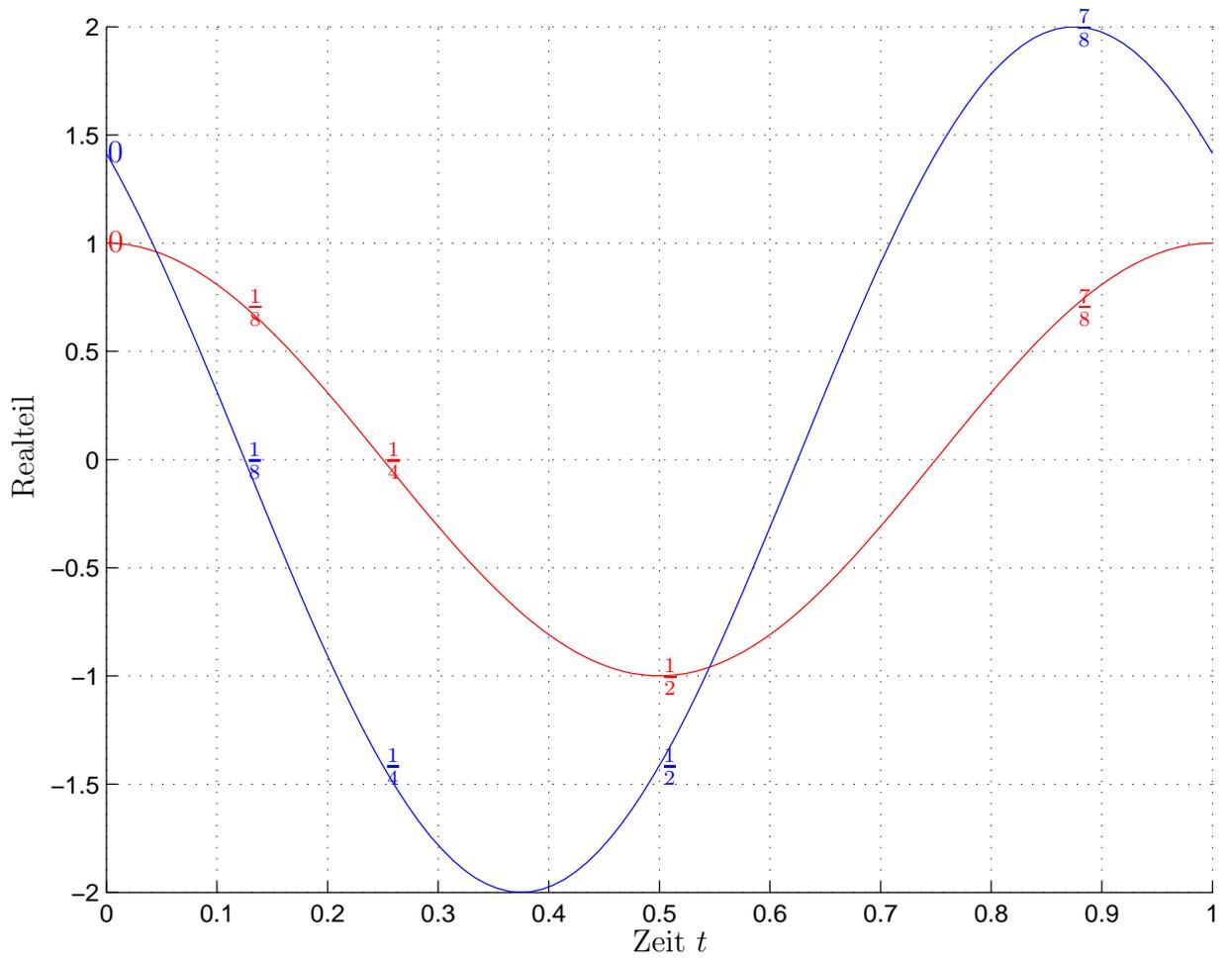
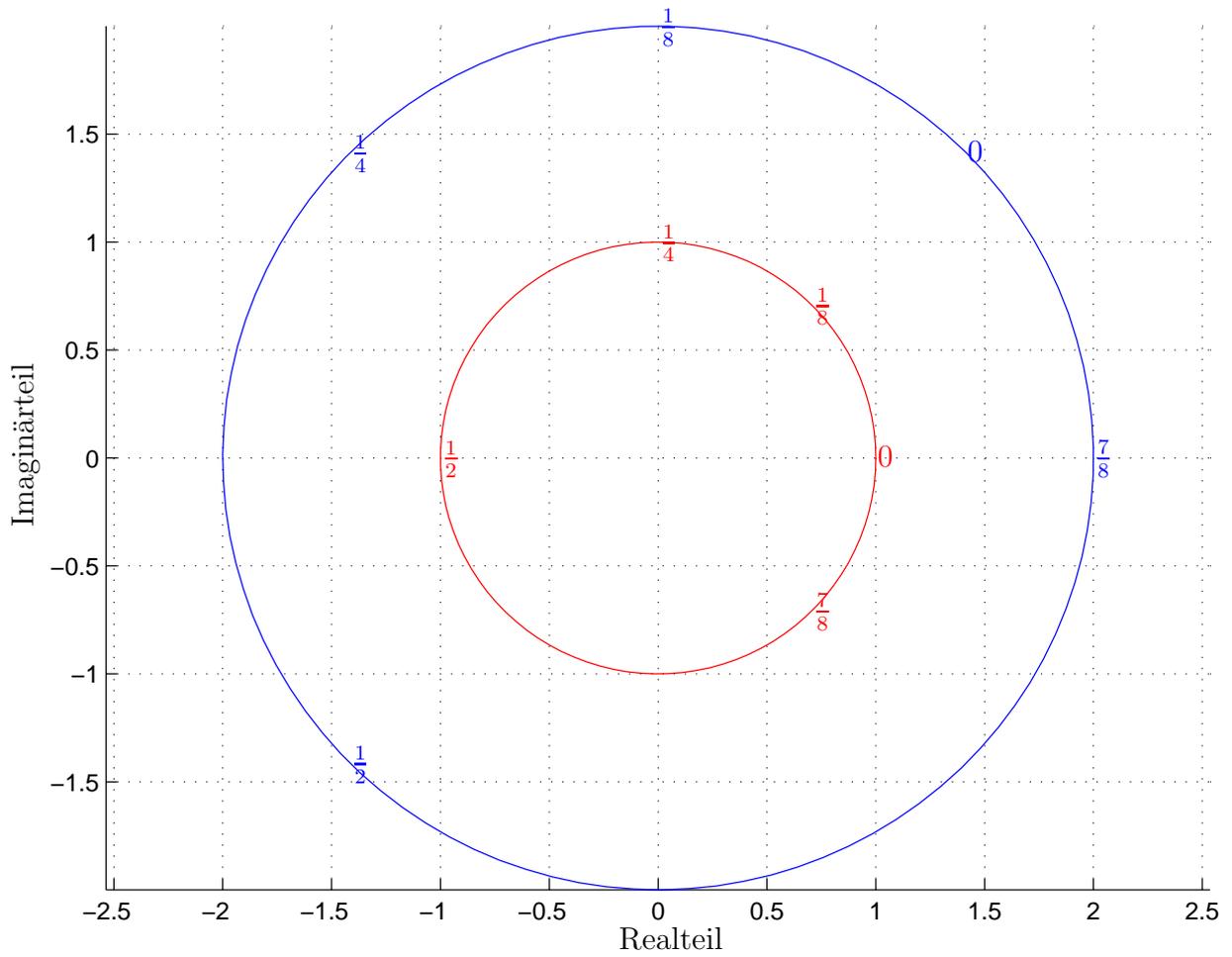


Abbildung 1: Kurven für $\omega = 2\pi$.

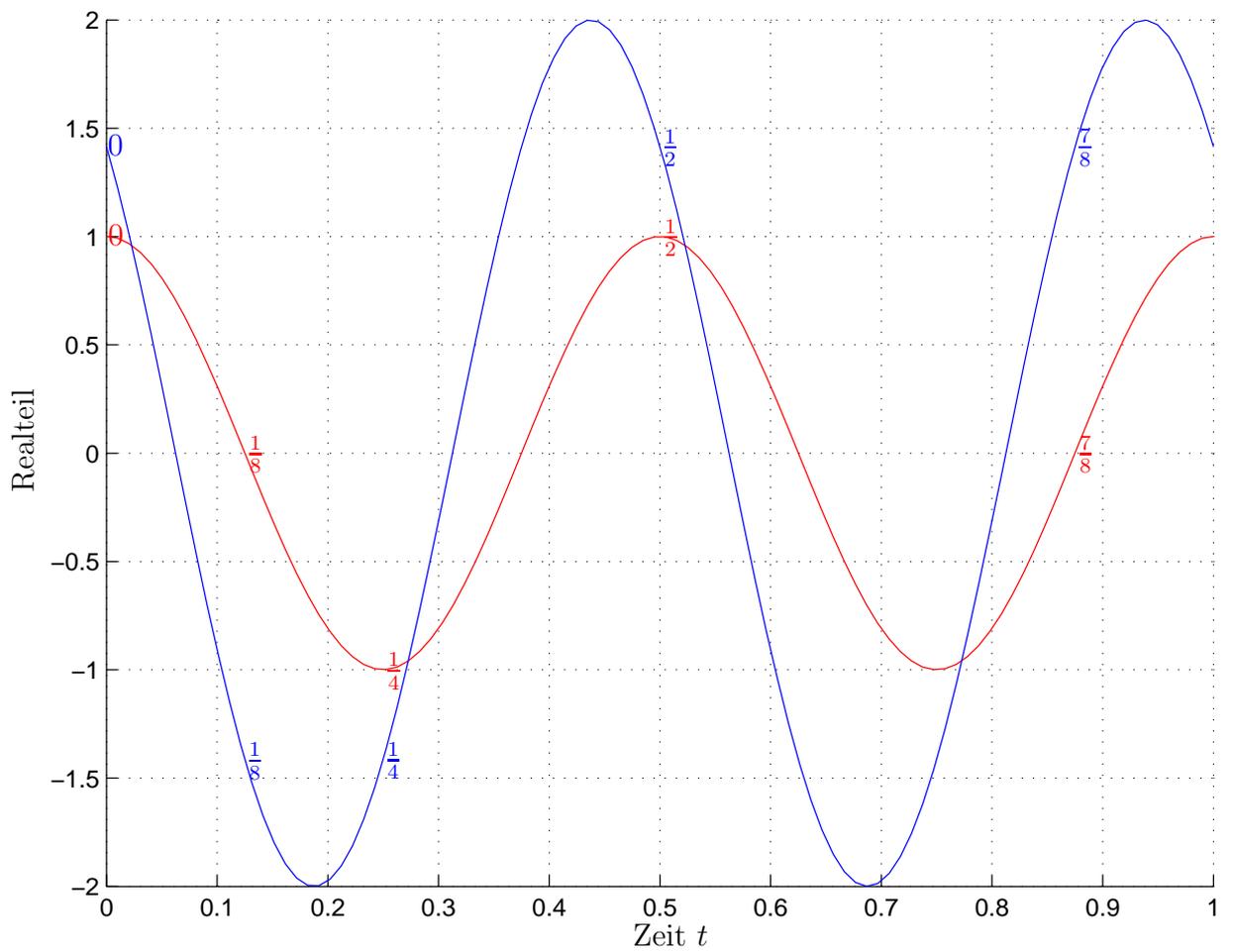
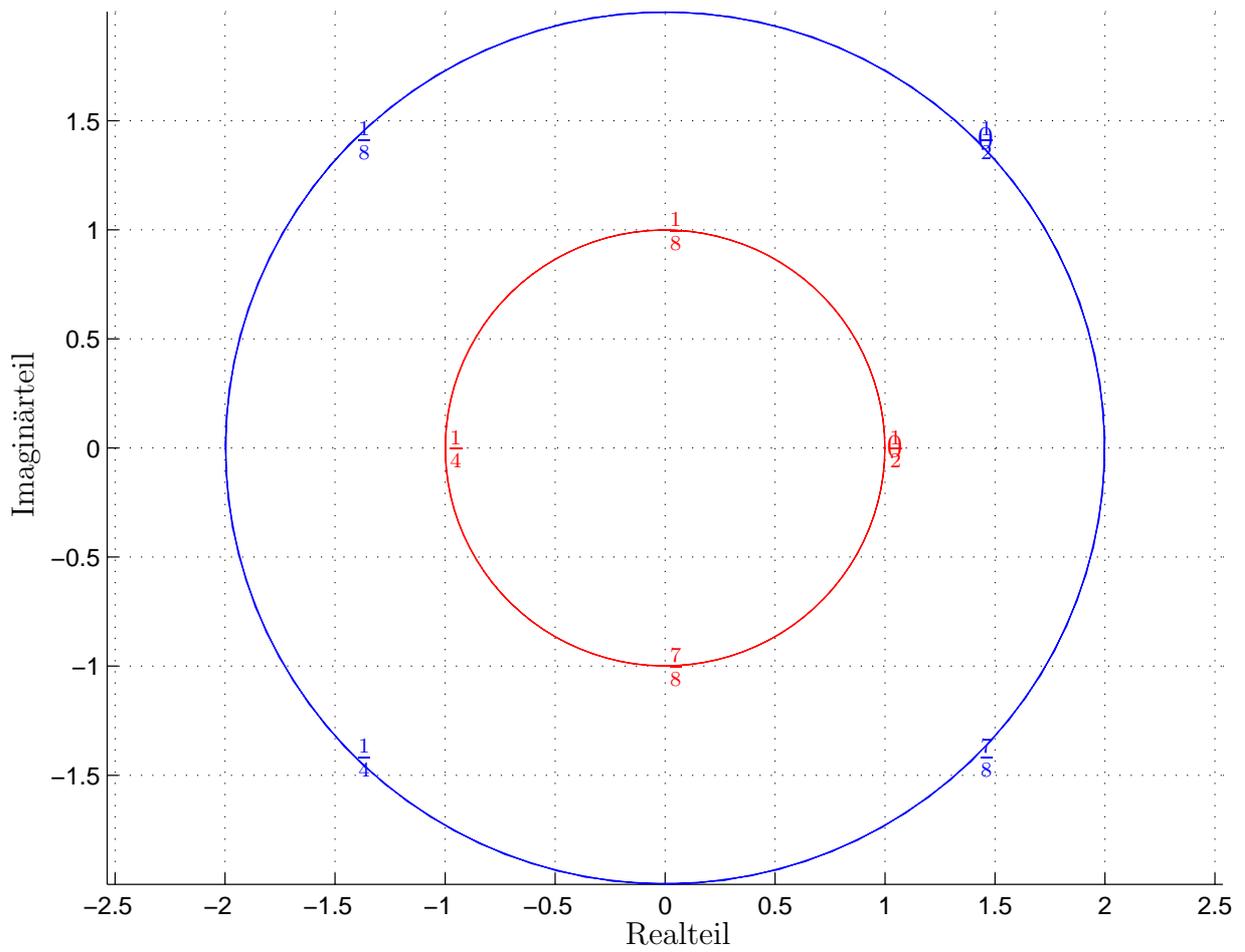


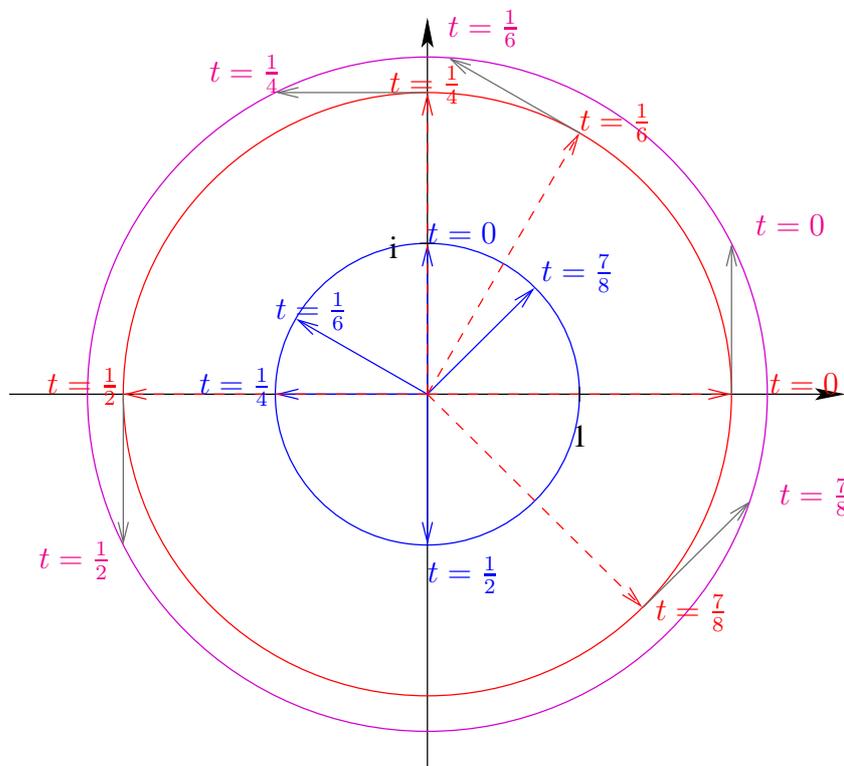
Abbildung 2: Kurven für $\omega = 4\pi$.

LÖSUNG:

- a) Die beiden Bahnkurven sind jeweils Kreise mit Radius 1 und 2. Die Zeiger sind jeweils um $\pi/2$ zueinander phasenverschoben. Die Zeiger der Summenfunktion haben Betrag

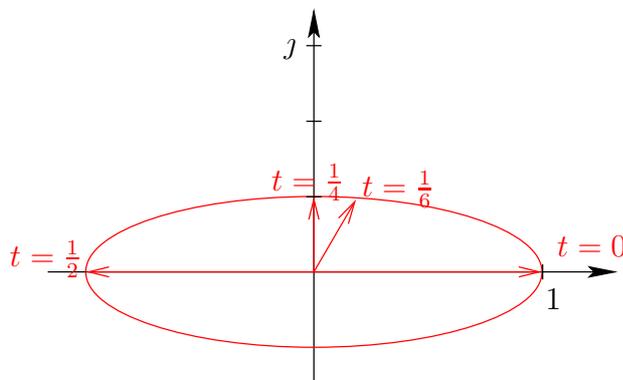
$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

und sind jeweils um eine Phase von $\phi = \arctan(\frac{1}{2}) (\approx 26,57^\circ)$ gedreht.



- b) Die Bahnkurve ist eine Ellipse mit Halbachsen 1 und $\frac{1}{3}$. Man kann das Bild als das Ergebnis der Stauchung eines Kreises um ein Drittel entlang der imaginären Achse auffassen.

Ersetzt man z_2 durch $\frac{1}{j^3} = -j\frac{1}{3}$, wird die Stauchung zusätzlich mit einer Spiegelung an der reellen Achse verknüpft. Die Bahnkurve geht dabei in sich selbst über, wird jedoch im umgekehrten Drehsinn durchlaufen (Zeitumkehr der Schwingung).



- c) Die Bahnkurve ist eine Ellipse. Nach der Formel aus dem Skript liegen deren Hauptachse bei

$$\omega t = \pi t = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightsquigarrow t = -\frac{1}{4} \quad \text{und}$$

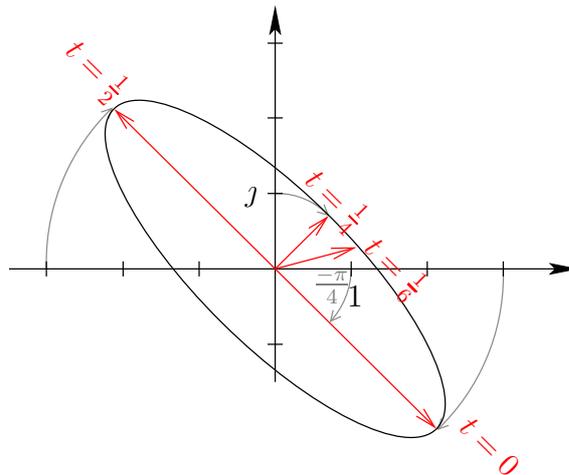
$$\omega t = \pi t = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow t = +\frac{1}{4}.$$

(**Achtung:** Im Skript ist die Formel für $f(t) = re^{j(\omega t + \phi)} + se^{-j(\omega t - \psi)}$ angegeben. Daher hat man hier $-\frac{\pi}{2}$.)

Nach Einsetzen von $t = -\frac{1}{4}$ erhält man

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{4}\right) &= 2 \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-j\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\left(2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \Rightarrow \arctan \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}}{-2 \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}} &= \arctan \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \arctan \frac{3\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Die Hauptachsen sind also um einen Winkel von $-\frac{\pi}{4}$ zu den Koordinatenachsen gedreht. Sie haben jeweils die Längen $1 + 2 = 3$ und $2 - 1 = 1$.



(G 30) Inversion am Kreis

Betrachten Sie die gebrochenrationale Abbildung

$$f: z \mapsto \frac{1}{z},$$

die Inversion am Einheitskreis.

- Zeigen Sie, dass die Inversion Kreislinien um den Ursprung in ebensolche Kreislinien überführt.
- Gegeben ist die Gerade $g: z_1 + \lambda \cdot z_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $z_1 = 3 + \frac{2}{7}j$ und $z_2 = j$. Zeichnen Sie das Bild dieser Gerade unter Inversion.
- Auf einer Kreislinie K liegen die drei Punkte $-j$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}(1+j)$. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kreislinie $f(K)$, auf die K abgebildet wird.
Hinweis: Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

LÖSUNG:

- Ein Kreis K mit dem Ursprung als Mittelpunkt lässt sich als die Menge

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$$

beschreiben, mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also gilt

$$z \in K \Leftrightarrow |z| = r \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow |f(z)| = \frac{1}{r}.$$

Es folgt, dass das Bild, $f(K)$, ebenfalls eine Kreislinie ist. Ihr Radius beträgt $\frac{1}{r}$:

$$f(K) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{r} \right\}.$$

LÖSUNGALTERNATIVE: Man beschreibt K nicht über den Betrag, sondern über die Polardarstellung:

$$K = \{re^{j\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\} \Rightarrow f(K) = \left\{ \frac{1}{r}e^{-j\phi} \mid \phi \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{da } (e^{j\pi})^{-1} = e^{-j\phi}.$$

Auch dies ist wieder eine Kreislinie der behaupteten Art.

- b) Die Gerade g ist senkrecht zur reellen Achse und schneidet diese im Punkt 3. Das Bild dieser Geraden ist also eine Kreislinie, die den Ursprung enthält, vom Radius $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ um den Punkt $\frac{1}{6}$.
- c) Wir errechnen zunächst die Bilder der drei gegebenen Punkte unter Inversion und bezeichnen sie mit w_1 , w_2 und w_3 :

$$w_1 := \frac{1}{-j} = j, \quad w_2 := \frac{1}{j/3} = -3j, \quad w_3 := \left(\frac{1}{6}(1+j) \right)^{-1} = +3 - 3j.$$

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des durch diese drei Punkte gebildeten Dreiecks ist der gesuchte Kreismittelpunkt. Zwei der Mittelsenkrechten lassen sich besonders leicht beschreiben, da die zugehörigen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen:

$$\begin{aligned} m_{12} &: -j + 1 \cdot \lambda && (\lambda \text{ durchläuft } \mathbb{R}), \\ m_{23} &: \frac{3}{2} + j \cdot \mu && (\mu \text{ durchläuft } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt w_0 ist offenbar gleich $-j + \frac{3}{2}$. Der Radius des gesuchten Kreises um diesen Punkt ist

$$|w_0 - w_1| = \left| \left(-j + \frac{3}{2}\right) - j \right| = \left| -2j + \frac{3}{2} \right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}.$$