



Mathematik I für ET, WI(ET), SpInf, iSt, BEEd.ET, CE

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 24)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1, 0, 1)$, $P_2(0, 2, 0)$ und $P_3(-3, -1, 0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

- Bestimmen Sie die Normalenform von E !
- Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.
- Berechnen Sie die (senkrechte) Projektion von $(-4, 3, 2)$ auf E .

LÖSUNG:

Gegeben sind die Punkte $P_1(-1, 0, -1)$, $P_2(0, 2, 0)$ und $P_3(-3, -1, 0)$. Es sei E die Ebene durch die obigen Punkte. Die Gerade g besitzt die Parameterdarstellung

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Die Parameterdarstellung von E lautet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3+1 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun, einen Vektor \vec{N} zu bestimmen, der senkrecht auf E steht:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \right\rangle = 0, \text{ und } \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \vec{N} \right\rangle = 0.$$

Man erhält somit ein (unterbestimmtes) homogenes LGS, aus dem man die Komponenten n_1 , n_2 und n_3 von \vec{N} bestimmen kann.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \vec{N} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen zunächst $s = 1$ und normalisieren dann \vec{N} :

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\langle \vec{n} \mid (0, 2, 0)^T \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$ lautet die Hesse Normalenform von E

$$E : \langle \vec{n} \mid x \rangle - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.$$

b) Die Gerade und die Ebene sind parallel, da der Richtungsvektor der Geraden g und der Normalenvektor der Ebene E orthogonal sind, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

c) Gesucht ist die Projektion von $(-4, 3, 2)$ auf E . Diese lässt sich beschreiben als Durchstoßpunkt einer zu E orthogonalen Geraden durch E , die durch $(-4, 3, 2)$ verläuft. Diesen bestimmt man mit folgendem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$
$$\begin{aligned} -3\nu - \lambda + 2\mu &= 3 \\ \Rightarrow 3\nu - 2\lambda + \mu &= -3 \\ 3\nu + \lambda + \mu &= -1 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die zum Durchstoßpunkt gehörigen Parameterwerte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \mu = \frac{2}{3}, \lambda = \frac{2}{3}, \nu = -\frac{7}{9}.$$

Der Durchstoßpunkt hat also die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dies ist die gesuchte Projektion.

Man kann nun auch sofort angeben, welche Gestalt die Projektion \tilde{g} der Geraden g auf E hat, nämlich

$$\tilde{g} : \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(G 25) Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag, Argument und Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 2 + j$, $z_2 = 4 - 3j$.

a) $z_3 = z_1^* z_2$

b) $z_4 = \frac{z_1}{z_2^*}$

LÖSUNG:

a) Es ist $z_3 = z_1^* z_2 = (2 - j)(4 - 3j) = 5 - 10j = 5(1 - 2j)$, Realteil 5, Imaginärteil -10 .
 $|z_3| = 5|1 - 2j| = 5\sqrt{5}$, $\arg z_3 = \arctan(-2) = -1,1071$. Somit $z_3 \approx 11,1803e^{-6,9564j}$ als Polarkoordinatendarstellung.

b) $z_4 = \frac{z_1}{z_2^*} = \frac{(2+j)(4-3j)}{25} = \frac{11-2j}{25}$, Realteil $\frac{11}{25}$ und $\frac{-2}{25}$ als Imaginärteil. $|z_4| = \frac{1}{25}\sqrt{125} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\arg z_4 = \arctan \frac{-2}{11} = -0,1799$. Die Polarkoordinatendarstellung ist $z_4 \approx 0,4472e^{-1,1301j}$.

(G 26) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7j$, $(1 - j)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7j, \quad z^{100} = (1 - j)^{100}.$$

b) Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3j$, $z_2 = -1 + 5j$ und $z_3 = \cos \phi + j \sin \phi$, $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig, den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3.$$

c) Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - j| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

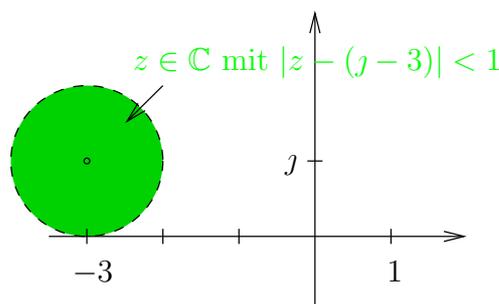
LÖSUNG:

a) Es gilt $-7j = 7e^{-\frac{2\pi j}{4}}$, wegen $(1 - j) = 2^{\frac{1}{2}}e^{2\pi j \frac{-1}{8}}$ ist $(1 - j)^{100} = 2^{50}e^{2\pi j \frac{-1}{2}} = -2^{50}$. Mit $\xi_n = e^{\frac{2\pi j}{n}}$ gilt

$$\begin{aligned} z^4 = 7e^{-\frac{2\pi j}{4}} &\Leftrightarrow z \in \sqrt[4]{7}\{e^{-\frac{\pi j}{8}}, e^{\frac{3\pi j}{8}}, e^{\frac{7\pi j}{8}}, e^{\frac{11\pi j}{8}}\}, \\ z^{100} = (1 - j)^{100} &\Leftrightarrow z \in \{(1 - j)\xi_{100}^k : k \in \{0, \dots, 99\}\}, \\ &\Leftrightarrow z \in \{\sqrt{2}e^{\pi j \frac{2k-25}{100}} : k \in \{0, \dots, 99\}\}. \end{aligned}$$

b) Es ist $\frac{z_1}{z_2^*} = \frac{13+13j}{26} = \frac{e^{\frac{\pi j}{4}}}{\sqrt{2}}$, daher $\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3 = \frac{e^{(\frac{\pi}{4}+3\phi)j}}{\sqrt{2}}$.

c) Siehe folgende Zeichnung:



(G 27)

a) Welche komplexe Zahl z erfüllt die Gleichung

$$j(z - 5) = 17 - 3j \quad ?$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

für $a = -1 - j$. Berechnen Sie - mit ausführlichem Rechenweg - die Polardarstellung von a .

Berechnen Sie a^{20} und geben Sie die Lösung auch in der Form $x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Wie groß ist $|a^{20}|$?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} j(z - 5) &= 17 - 3j \\ \Leftrightarrow jz - 5j &= 17 - 3j && | + 5j \\ \Leftrightarrow jz &= 17 + 2j && | \cdot j \\ \Leftrightarrow -z &= 17j - 2 && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow z &= 2 - 17j. \end{aligned}$$

b) Zunächst bringen wir $a = -1 - j$ in Polardarstellung. Es gilt

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Wegen $\operatorname{Re}(a) = -1$, $\operatorname{Im}(a) = -1$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ gilt

$$\begin{aligned} \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ mit den Lösungen } \varphi = \frac{5\pi}{4} && \text{ oder } \varphi = \frac{7\pi}{4} \\ \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ mit den Lösungen } \varphi = \frac{3\pi}{4} && \text{ oder } \varphi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Der Winkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ taucht in beiden Fällen als Lösung auf. Daher lautet die Polardarstellung von a :

$$a = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + j \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \exp \left(j \cdot \frac{5\pi}{4} \right).$$

Als Lösungen der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2} \exp \left(j \frac{\varphi + 0 \cdot 2\pi}{2} \right) = \sqrt{|a|} \exp \left(j \cdot \frac{\varphi}{n} \right) = \sqrt[4]{2} \exp \left(j \cdot \frac{5\pi}{8} \right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{2} \exp \left(j \frac{\varphi + 1 \cdot 2\pi}{2} \right) = \sqrt{|a|} \exp \left(j \cdot \frac{\varphi + 2\pi}{n} \right) = \sqrt[4]{2} \exp \left(j \cdot \frac{13\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

Zur Berechnung von a^{20} wählen wir die Polardarstellung von a :

$$\begin{aligned} a^{20} &= \left(\sqrt{2} \exp \left(j \frac{5\pi}{4} \right) \right)^{20} \\ &= (\sqrt{2})^{20} \left(\exp \left(j \frac{5\pi}{4} \right) \right)^{20} = 2^{10} \exp (j25\pi) = 2^{10} \exp (j\pi) = -2^{10}. \end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, gilt $|a| = |-2^{10}| = 2^{10}$.

Hausübungen

(H 25) (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

- a) Die Geraden schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt!
Wie groß ist der Schnittwinkel der Geraden?
- b) Geben Sie die Normalendarstellung der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist!

LÖSUNG:

Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

- a) Setzen wir g_1 und g_2 gleich, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} a\lambda & = & -4 \\ -8\lambda + \mu & = & 8 \\ \lambda - \mu & = & -1 \end{array}$$
$$\Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{und} \quad \mu = 0$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden berechnet sich somit als

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Geraden schneiden sich unter einem Winkel von

$$\alpha = \arccos \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ).$$

- b) Die gesuchte Ebene besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Über

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1/4 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

bestimmt sich ein Normalenvektor

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Normalenform gilt also:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{92}{9} = 0.$$

(H 26) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (1+j)z_1 + (1-j)z_2 &= 3+j \\ (1-j)z_1 + 3jz_2 &= -3-2j \end{aligned}$$

LÖSUNG:

Wir wenden das gewohnte Verfahren zur Lösung des inhomogenen LGS an. Man zieht die erste Zeile, multipliziert mit $\frac{1-j}{1+j}$, von der zweiten ab:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1+j) & (1-j) & 3+j \\ (1-j) & 3j & -3-2j \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} (1+j) & (1-j) & 3+j \\ 0 & 1+4j & -4+j \end{array} \right).$$

Hierzu sind einige Nebenrechnungen nötig:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+j} &= \frac{1-j}{1^2+1^2} = \frac{1-j}{2}, \\ \frac{1-j}{1+j} &= \frac{(1-j)^2}{2} = \frac{1-2j-1}{2} = -j, \\ 3j - (1-j)\frac{1-j}{1+j} &= 3j + j(1-j) = 4j+1, \\ -3-2j - (3+j)\frac{1-j}{1+j} &= -3-2j + j(3+j) = -4+j. \end{aligned}$$

Man liest nun ab:

$$\begin{aligned} z_2(1+4j) &= (-4+j) = (4j+1)j, \quad \text{also } z_2 = j, \\ z_1 &= \frac{1}{1+j}(3+j - (1-j)j) = \frac{1}{1+j}(3+j-j+j^2) = \frac{1-j}{2}(2+0) = 1-j. \end{aligned}$$

(H 27) (6 Punkte) Dreiecksungleichung im Komplexen

a) Zeigen Sie: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re} z \leq |z|$. Wann gilt Gleichheit?

b) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

c) Beweisen Sie: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Hinweis: Quadrieren Sie in a) und b) jeweils beide Seiten der Ungleichung. (Warum genügt es, die quadrierten Ungleichungen zu betrachten?)

LÖSUNG:

a) Da $\operatorname{Re} z$ eine reelle Zahl ist, gilt zunächst $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re}(z)|$. Weiter gilt

$$|\operatorname{Re}(z)|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 \leq \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2.$$

hieraus ergibt sich $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, wie behauptet.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z) = |\operatorname{Re}(z)|$ und $\operatorname{Im}(z) = 0$, also wenn z eine nicht negative reelle Zahl ist.

b) Wir zeigen $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. (Da $|z|$ für jede komplexe Zahl reell und ≥ 0 ist, folgt daraus auch die behauptete Ungleichung.)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\ &= z_1 z_1^* + z_2 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) \\ &\stackrel{a)}{\leq} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

c) Hier kann man genauso vorgehen wie bei dem Beweis der entsprechenden Ungleichung im Reellen:

$$|z_1 - z_2| + |z_2| \stackrel{b)}{\geq} |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1|,$$

also $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

(H 28) (5 Punkte) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung

$$(3 + j)z - \frac{1}{j} = 2 + 3j.$$

b) Berechnen Sie $z = (1 + j)^{20}$.

c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.

LÖSUNG:

a) Es ist $(3 + j)z - \frac{1}{j} = 2 + 3j$ also $z = 2\frac{1+j}{3+j} = \frac{1}{5}(1 + j)(3 - j) = \frac{2}{5}(2 + j)$.

b) $\omega = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\phi}$ mit $\phi = \frac{\pi}{4}$, also $20\phi = 5\pi \equiv 1\pi \pmod{2\pi}$, also $\omega^{20} = \sqrt{2}^{20} e^{j\pi} = 2^{10} \cdot (-1) = -1024$.

c) $z^4 = -1 = e^{\frac{1}{2}2\pi j}$, mit $\xi_4 = e^{\frac{2\pi j}{4}} = j$ folgt

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{1+j}{\sqrt{2}} \xi_4^k : k \in \{0, \dots, 3\} \right\} = \left\{ \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}, \pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \right\}.$$