Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 12.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 20) Quantoren

Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen stimmen und was die Unterschiede zwischen den Paaren i) und ii) sind.

a) i) Für alle Autos gibt es einen Motor.
   ii) Es gibt einen Motor für alle Autos.

b) i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \leq n$ gilt.
   ii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq n$ gilt.

Lösung:

Die Aussage ai) ist richtig. Die Aussage aii) hingegen ist falsch, denn sie besagt, dass es nur einen einzigen Motor für alle Autos gibt.

Die Aussage bi) ist richtig. Betrachtet man ein $x \in \mathbb{R}$ und setzt n als die nächst größere natürliche Zahl, so gilt $x \leq n$. Die zweite Aussage bii) ist falsch. Denn gäbe es ein solches $n \in \mathbb{N}$, dann setzen wir $x := n + 1 \in \mathbb{R}$ und erhalten einen Widerspruch dazu, dass $x \leq n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Insbesondere sehen wir, dass zwischen

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$$

und

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : x \leq n$$

ein Unterschied besteht. Die Reihenfolge der Quantoren ist von entscheidender Bedeutung.

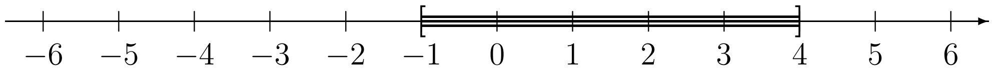
(G 21) Beträge und Ungleichungen

Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden.

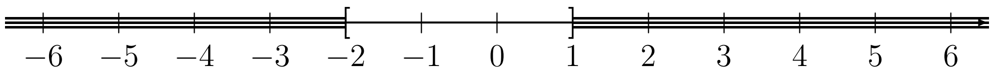
a) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5\}$
b) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| > 3\}$
c) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ und } |2x + 1| > 3\}$
d) $M = \{x \in \mathbb{R} : \big||x| - 3\big| \leq 2\}$
e) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ oder } \big||x| - 3\big| \leq 2\}$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} |2x-3| \leq 5 \quad &\iff \quad 2x-3 \leq 5 \text{ und } 2x-3 \geq -5 \\ &\iff \quad 2x \leq 8 \text{ und } 2x \geq -2 \\ &\iff \quad x \leq 4 \text{ und } x \geq -1 \\ &\iff \quad -1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

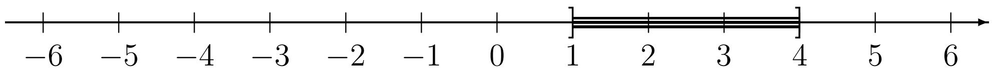


b)
$$\begin{aligned} |2x+1| > 3 \quad &\iff \quad 2x+1 > 3 \text{ oder } 2x+1 < -3 \\ &\iff \quad 2x > 2 \text{ oder } 2x < -4 \\ &\iff \quad x > 1 \text{ oder } x < -2 \end{aligned}$$

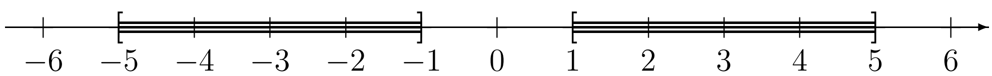


c) Hier werden die beiden Bedingungen aus a) und b) mit „und“ verknüpft, die beiden Mengen also geschnitten („ $\cap$“).

$$\begin{aligned} &|2x-3| \leq 5 \text{ und } |2x+1| > 3 \\ &\iff \quad -1 \leq x \leq 4 \text{ und } (x > 1 \quad \text{oder } x < -2) \\ &\iff \quad (-1 \leq x \leq 4 \text{ und } x > 1) \quad \text{oder } (-1 \leq x \leq 4 \quad \text{und } x < -2) \\ &\iff \quad 1 < x \leq 4 \end{aligned}$$

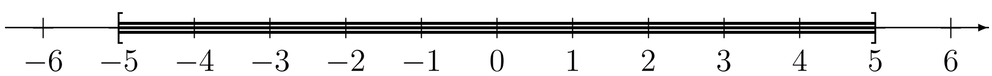


d)
$$\begin{aligned} &\Big||x|-3\Big| \leq 2 \\ &\iff \quad |x|-3 \leq 2 \text{ und } |x|-3 \geq -2 \\ &\iff \quad |x| \leq 5 \text{ und } |x| \geq 1 \\ &\iff \quad (x \leq 5 \text{ und } x \geq -5) \text{ und } (x \geq 1 \text{ oder } x \leq -1) \\ &\iff \quad (x \leq 5 \text{ und } x \geq -5 \text{ und } x \geq 1) \text{ oder } (x \leq 5 \text{ und } x \geq -5 \text{ und } x \leq -1) \\ &\iff \quad (x \leq 5 \text{ und } x \geq 1) \text{ oder } (x \geq -5 \text{ und } x \leq -1) \\ &\iff \quad 1 \leq x \leq 5 \text{ oder } -5 \leq x \leq -1 \end{aligned}$$



e) Hier werden die beiden Bedingungen aus a) und d) mit „oder“ verknüpft, die beiden Mengen also vereinigt („ $\cup$“).

$$\begin{aligned} &|2x-3| \leq 5 \text{ oder } \Big||x|-3\Big| \leq 2 \\ &\iff \quad -1 \leq x \leq 4 \text{ oder } 1 \leq x \leq 5 \text{ oder } -5 \leq x \leq -1 \\ &\iff \quad -5 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$



(G 22) Archimedisches Axiom

In dieser Aufgabe sollen Folgerungen aus den Archimedischen Prinzipien betrachtet werden.

a) Beweisen Sie: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Dann gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$, mit $r > 0$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $b^n > r$.
Hinweis: Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ für jedes reelle $x > 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, vgl. Aufgabe (H 16).

b) Zeigen Sie: Sei b eine reelle Zahl mit $0 < b < 1$. Dann gibt es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

LÖSUNG:

a) Sei $x = b - 1$ und $y = r - 1$. Nach Voraussetzung ist $x > 0$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt also

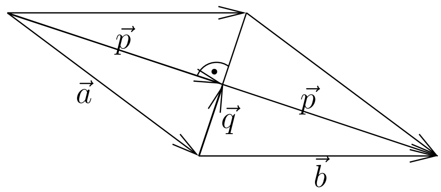
$$b^m = \big(x+1\big)^m \geq 1 + mx, \qquad \text{für jedes } m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Nach dem Postulat (5) von Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > y = (r-1)$. Für dieses n gilt dann nach (1) $b^n \geq 1 + nx > r$.

b) Da $0 < b < 1$ gilt $\frac{1}{b} > 1$. Aus Teil a) folgt, dass ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left(\frac{1}{b}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Folglich gilt $b^n < \varepsilon$.

(G 23)

Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ein Rhombus (eine Raute) ist, d.h. alle Seiten sind gleich lang.



Hinweis: In Aufgabe (H 8) wurde gezeigt, dass sich die Diagonalen halbieren.

LÖSUNG:

Es genügt, die Gleichheit von zwei aneinander angrenzenden Seiten zu beweisen, aus Symmetriegründen sind dann auch die anderen Seiten gleich lang.

Aus (H 8) folgt, dass es gleich weit von einer Ecke zum Diagonalenschnittpunkt ist, wie von dort zur gegenüberliegenden Ecke, daher sind die beiden eingezeichneten Vektoren $\vec{p}$ äquivalent. Deshalb gilt:

$$\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{q} + \vec{p}.$$

$$\text{Folglich ist } \|a\|^2 = \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle = \langle \vec{p} \mid \vec{p} \rangle + \langle \vec{q} \mid \vec{q} \rangle - \underbrace{2 \cdot \langle \vec{q} \mid \vec{p} \rangle}_{=0 \text{ da } \vec{p} \perp \vec{q}}$$

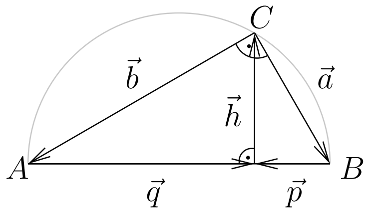
$$\|b\|^2 = \big\langle \vec{b} \mid \vec{b} \big\rangle = \langle \vec{p} \mid \vec{p} \rangle + \langle \vec{q} \mid \vec{q} \rangle + \underbrace{2 \cdot \langle \vec{q} \mid \vec{p} \rangle}_{=0 \text{ da } \vec{p} \perp \vec{q}},$$

vgl. Aufgabe (H 24). Daraus folgt aber, dass auch $\|a\| = \|b\|$.

Hausübungen

(H 20) (5 Punkte) Höhensatz

Betrachten Sie folgendes rechtwinkliges Dreieck:



Beweisen Sie den sogenannten Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q,$$

hierbei bezeichnen h, p, q jeweils die Längen der Höhe und der beiden Höhenabschnitte im rechtwinkligen Dreieck A, B, C. Verwenden Sie dazu das Skalarprodukt!

Lösung:

Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung gilt $\vec{a} = -(\vec{p} + \vec{h})$, $\vec{b} = -(\vec{q} + \vec{h})$.

Da nach Voraussetzung der Winkel bei C ein rechter ist, gilt

$$0 = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{h} + \vec{p} \mid \vec{h} + \vec{q} \rangle = \langle \vec{h} \mid \vec{h} \rangle + \underbrace{\langle \vec{h} \mid \vec{q} \rangle + \langle \vec{h} \mid \vec{p} \rangle}_{=0} + \langle \vec{p} \mid \vec{q} \rangle,$$

wobei zwei Terme wegfallen, da $\vec{h} \perp \vec{p}, \vec{q}$ ist. Da $\vec{p}$ und $\vec{q}$ entgegengesetzte Richtungen haben, also $-\vec{p} \parallel \vec{q}$, gilt $\langle \vec{p} \mid \vec{q} \rangle = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|$. Man erhält also

$$0 = -\langle \vec{h} \mid \vec{h} \rangle + \langle \vec{p} \mid \vec{q} \rangle = \|\vec{h}\|^2 - \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \;\Leftrightarrow\; \|\vec{h}\|^2 = \|\vec{p}\|\|\vec{q}\|.$$

Genau das war zu zeigen.

(H 21) (3 Punkte) Beträge und Ungleichungen

Bestimmen Sie für die Mengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge von

a) $7x + 8 = 3x$,

b) $|3x + 2| = 5$,

c) $|x + 3| + |x - 3| < 10$.

Lösung:

a) Die Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $4x = -8$, die in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$ jeweils die eindeutige Lösung $x = -2$ besitzt, in $\mathbb{N}$ jedoch nicht lösbar ist.

b) Die Betragsgleichung ist äquivalent zum Ausdruck

$$\begin{aligned} 3x + 2 = 5 \text{ oder } \; 3x + 2 = -5 \\ \text{bzw.} \quad 3x = 3 \text{ oder } 3x = -7. \end{aligned}$$

Damit besitzt $|3x + 2| = 7$ in $\mathbb{R}$ die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{-7}{3}$, in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$ jedoch nur die eindeutige Lösung $x = 1$.

c) Hier handelt es sich um eine Ungleichung. Sei zunächst $x \in \mathbb{R}$. Da zwei Beträge vorkommen, führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. $x \geq 3$, also $x + 3 > 0$ und $x - 3 \geq 0$ Dann ist $|x + 3| + |x - 3| < 10$ äquivalent zu
$$(x + 3) + (x - 3) < 10,$$
also $2x < 10$ mit der Lösungsmenge $x \in \mathcal{L}_1 = [3, 5)$.
2. $-3 < x < 3$, also $x+3 > 0$ und $x-3 < 0$ Dann ist $|x+3|+|x-3| < 10$ äquivalent zu
$$(x + 3) - (x - 3) < 10,$$
also $6 < 10$ mit der Lösungsmenge $x \in \mathcal{L}_2 = (-3, 3)$.
3. $x \leq -3$, also $x+3 \leq 0$ und $x-3 < 0$ Dann ist $|x+3|+|x-3| < 10$ äquivalent zu
$$-(x + 3) - (x - 3) < 10,$$
also $-2x < 10$ mit der Lösungsmenge $x \in \mathcal{L}_3 = (-5, -3]$.

Insgesamt erhält man damit die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 = (-5, 5)$.

Schränkt man x auf die ganzen Zahlen ein, dann muß man $\mathcal{L}$ mit $\mathbb{Z}$ schneiden und erhält die Lösungsmenge $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Für $x \in \mathbb{N}_0$ verbleiben die Lösungen $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(H 22) (5 Punkte) Babylonisches Wurzelziehen

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n}),$$
mit $b_1 = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $b_n > 0$ und $b_n^2 \geq x$ für alle $n \geq 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. $b_{n+1} \leq b_n$ gilt für alle $n \geq 1$.

c) Betrachten Sie nun die Folge
$$a_n = \frac{x}{b_n}, \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots .$$
Weisen Sie nach, dass die Folge monoton steigt, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n, und dass immer $a_n^2 \leq x$ gilt.

d) Zeigen Sie nun, dass
$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(b_n - a_n)\,.$$
Anleitung: Drücken Sie alles durch b_n aus, schätzen Sie b_{n+1} durch b_n ab.

e) Zeigen Sie, dass durch die beiden Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ und $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Intervallschachtelung gegeben wird, welche die reelle Zahl $\sqrt{x}$ approximiert.

Lösung:

a) Das $b_n > 0$ für alle n gilt, ergibt sich durch Induktion: $b_1 > 0$ und b_{n+1} ist Summe der (nach Induktionsvoraussetzung) positiven Zahlen $\frac{b_n}{2}$ und $\frac{x}{2b_n}$.

Nun zeigt man $b_n^2 > y$: Zunächst gilt $b_1^2 = x^2 + 2x + 1 > x$.
Für $n > 1$ hat man

$$\begin{aligned} b_n^2 - x &= \frac{1}{4}(b_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{b_{n-1}^2}) - x = \frac{1}{4}(b_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{b_{n-1}^2} - 4x) \\ &= \frac{1}{4}(b_{n-1}^2 - 2x + \frac{x^2}{b_{n-1}^2}) = \frac{1}{4}(b_{n-1} - \frac{x}{b_{n-1}})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

folglich $b_n^2 \geq x$.
Bermekung: Man kann leicht auch zeigen, dass $b_n^2 > x$, indem man induktiv vorgeht und in

$$(b_{n-1} - \frac{x}{b_{n-1}})^2 = \frac{1}{b_{n-1}^2}(b_{n-1}^2 - x)^2$$

die Induktionsvoraussetzung einsetzt.

b)

$$b_n - b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n}) = \frac{1}{2}(2b_n - b_n - \frac{b}{b_n}) = \frac{1}{2}(b_n - \frac{x}{b_n}) = \frac{1}{2b_n}(b_n^2 - x) \geq 0,$$

wegen a).

c) Dies folgt aus a) und b). Denn aus $b_n^2 \geq x$ erhält man

$$\frac{1}{b_n^2} \leq \frac{1}{x}, \qquad \text{also gilt} \quad a_n^2 = \frac{x^2}{b_n^2} \leq \frac{x^2}{x} = x.$$

Und aus $b_{n+1} \leq b_n$ folgt sofort $a_{n+1} = \frac{x}{b_{n+1}} \geq \frac{x}{b_n} = a_n$.

d) Aus $b_{n+1} \leq b_n$ folgt $\frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{b_n}$ und daraus $-\frac{1}{b_{n+1}} \leq -\frac{1}{b_n}$. Es gilt also

$$\frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} = \frac{\frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n}) - \frac{x}{b_{n+1}}}{b_n - \frac{x}{b_n}} \leq \frac{\frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n}) - \frac{x}{b_n}}{b_n - \frac{x}{b_n}} = \frac{\frac{1}{2}(b_n - \frac{x}{b_n})}{b_n - \frac{x}{b_n}} = \frac{1}{2}.$$

e) Zunächst überprüfen wir, dass es sich tatsächlich um eine Intervallschachtelung handelt: Aus a), b), c) folgt

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq a_m \leq \sqrt{x} \leq b_m \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad \text{für alle } 1 \leq n \leq m.$$

Es bleibt zu überprüfen, dass es zu jedem $k > 0$ in $\mathbb{N}$ ein n gibt, so dass

$$b_n - a_n \leq \frac{1}{k}.$$

Dies folgt aber aus d), denn es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_1 - a_1 \leq N$. Aus d) folgt nun, dass

$$b_m - a_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m N, \quad \text{für } m \geq 1.$$

(Induktion nach m.)

Setze nun $k' = k \cdot N$. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $2^n \geq k'$. Dann gilt aber auch

$$b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n N \leq \frac{N}{k'} = \frac{1}{k}.$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip wird durch diese Intervallschachtelung eine reelle Zahl approximiert. Dass hier $\sqrt{x}$ approximiert wird, ergibt sich daraus, dass $a_n \leq \sqrt{x} \leq b_n$ nach Teilen b) und c) für alle n gilt, $\sqrt{x}$ also in allen Intervallen enthalten ist.

ZUSATZFRAGE: Warum ist $\sqrt{x}$ die einzige so approximierte Zahl?
LÖSUNG: Indirekter Beweis, dass (nur) genau eine Zahl approximiert wird.
Annahme: y, $y' \in \mathbb{R}$, $y \neq y'$, werden approximiert, sind also beide in allen Intervallen enthalten. OBdA sei $y' > y$. Dann gilt aber $y' - y > 1/2^M(b_1 - a_1)$ für ein M in $\mathbb{N}$ (wieder Archimedisches Prinzip, vgl.(G 22b)). Folglich liegen y und y' nicht beide im Intervall $[a_M, b_M]$! **Widerspruch.**

(H 23) (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Raum, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das Skalarprodukt, und $\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v} \mid \vec{v} \rangle}$. Zeigen Sie, dass für $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ gilt:

$$\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} + \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|.$$

LÖSUNG:

Laut Definition gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} + \vec{b} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \left\langle \vec{a} - \vec{b} \mid \vec{a} + \vec{b} \right\rangle = 0, \\
&\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left\langle \vec{a} \mid \vec{a} \right\rangle}_{=\|\vec{a}\|^2} - \left\langle \vec{b} \mid \vec{a} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \vec{a} \mid \vec{b} \right\rangle}_{=\left\langle \vec{b} \mid \vec{a} \right\rangle} - \underbrace{\left\langle \vec{b} \mid \vec{b} \right\rangle}_{=\|\vec{b}\|^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|.
\end{aligned}$$

(H 24) (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf V. Die Norm sei durch $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} \mid \vec{v} \rangle}$ erklärt.

Zeigen Sie, dass für jedes Paar von Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ folgende Aussagen gelten:

a) $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$, wobei θ den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bezeichnet. (Verallgemeinerter Pythogoras)

b) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$ (Parallelogramm Gleichung).

LÖSUNG:

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y} \mid \vec{x} - \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle - \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle .
\end{aligned}$$

Per Definition des Winkels zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$.

b) Addiert man a) und a), mit $\vec{y}$ durch $-\vec{y}$ ersetzt, dann erhält man die Gleichung.