Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 29.10.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 10)

Betrachten Sie das homogene lineare Gleichungssystem aus Aufgabe (G9).

a) Welchen Rang hat das Gleichungssystem? Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums an.

b) Überprüfen Sie, ob der Lösungsraum ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ ist!

LÖSUNG:

Die Zeilenstufenform des Gleichungssystems aus (G9) lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 4 & 0 \\ & & 5 & 27 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

a) Man erkennt sofort, dass der Rang 3 ist. Das Gleichungssystem ist somit unterbestimmt und die Dimension des Lösungsraums ist 2. Um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, ist es hilfreich, das Gleichungssystem weiter umzuformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -81/5 & 2/5 \\ 0 & 3 & 0 & -7/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 27/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -229/15 & 8/15 \\ 0 & 1 & 0 & -7/15 & -1/15 \\ 0 & 0 & 1 & 27/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann man x_4 und x_5 als Parameter r und s behandeln und liest einfach ab:

$$x_1 = \frac{229}{15}r - \frac{8}{15}s,\ x_2 = \frac{7}{15}r + \frac{1}{15}s,\ x_3 = -\frac{27}{5}r - \frac{1}{5}s.$$

Das gesuchte Fundamentalsystem ist also gleich

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{229}{15} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{27}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 229 \\ 7 \\ 81 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

b) Der Lösungsraum von dieses LGS ist die Menge

$$U = \{r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Um zu sehen, dass dies ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ ist, überprüft man folgendes:

- $\mathbf{0} \in U$: Klar, da ein homogenes LGS, wenn es lösbar ist auch immer den 0-Vektor als *triviale Lösung* zulässt.
- $\mathbf{y} + \mathbf{z} \in U$, für jedes Paar $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in U$: Als Elemente von U lassen sich $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ als *Linearkombination* von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ schreiben:

$$\mathbf{y} = \lambda_y \mathbf{u} + \mu_y \mathbf{v}, \mathbf{z} = \lambda_z \mathbf{u} + \mu_z \mathbf{v}, \quad \text{folglich ist } \mathbf{y} + \mathbf{z} = \underbrace{(\lambda_y + \lambda_z)}_{=\lambda' \in \mathbb{R}} \mathbf{u} + \underbrace{(\mu_y + \mu_z)}_{=\mu' \in \mathbb{R}} \mathbf{v}$$

  wieder $\in U$.
- $r\mathbf{y} \in U$ für jedes $\mathbf{y} \in U$, $r \in \mathbb{R}$: Genauso. Da $\mathbf{y} \in U$ ist es eine reelle Linearkombination von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und damit ist $r\mathbf{y} = r\lambda_y \mathbf{u} + r\mu_y \mathbf{v}$ ebenfalls in U.

(G 11)

Sie haben das folgende, von einem Renditeparameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige LGS:

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + az &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1. \end{aligned}$$

a) Bringen Sie das System durch Zeilenumformungen in Stufenform.

b) Schreiben Sie die Zeilenumformungen aus a) in *Matrizenschreibweise*: hierbei steht in T_{ij} der Koeffizient der alten Zeile Z_j für die neue Zeile Z'_i, wobei T eine $m \times m$-Matrix ist (bei m Zeilen im LGS). Es ist also $Z'_i = T_{i1} Z_1 + \cdots + T_{im} Z_m$. Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \overset{T}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \overset{T'}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{41}{13} \end{pmatrix}$$

kann beschrieben werden durch $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{13} & 1 \end{pmatrix}.$

c) Bestimmen Sie den Lösungsraum L des LGS in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ und klassifizieren Sie, um welches geometrische Objekt es sich in den einzelnen Fällen bei L handelt.

LÖSUNG:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{T}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & a & 1 \\ & a & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{T'}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & a & 1 \\ & & 1 - a^2 & 1 - a \end{array}\right).$

b) $T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$ und $T' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -a & 1 \end{pmatrix}.$

c) Potentiell problematisch kann hier nur $1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$ sein.
Fall $a = -1$: $Z_3'' : 0x_3 = 2$ ist nicht erfüllbar, $L = \emptyset$.
Fall $a = +1$: $Z_3'' : 0 = 0$ trivial erfüllt, das LGS ist unterbestimmt und

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1 - ax_3, x_1 = -x_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
Sonst ($a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$): L entspricht einem Punkt im dreidimensionalen Raum:

$$L = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(G 12)

Gegeben sind zwei Ebenen im Raum in impliziter Form: Bestimmen Sie jeweils eine Darstellung dieser Ebenen in Parameterform!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & E_1 : & x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \\ \text{b)} & E_2 : & 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5. \end{array}$$

LÖSUNG:

a) Die implizite Darstellung entspricht dem unterbestimmten homogenen LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Ein Fundamentalsystem erhält man leicht, indem man x_2 und x_3 als Parameter r und s behandelt. Es gilt dann $x_1 = 5r - 2s$, also hat man ein Fundamentalsystem

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \rightsquigarrow E_2 : \ r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

b) Hier ist das zugehörige unterbestimmte LGS inhomogen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 5 \end{array} \right).$$

Behandelt man wieder x_2 und x_3 als Parameter, so gilt $x_1 = -\frac{2}{3}r - \frac{7}{3}s + \frac{5}{3}$. Es ergibt sich eine Parameterform

$$E_2 : \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(G 13)

a) Betrachten Sie folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie rechnerisch, ob $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind:

b) Gegen sind fünf Vektoren im $\mathbb{R}^5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 26 \\ 7 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 4 \\ -54 \\ 80 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie diese rechnerisch auf lineare Unabhängigkeit.

c) Prüfen Sie nach, ob die folgenden sieben Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7 \in \mathbb{R}^6$ linear unabhängig sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \big(\ \ 0,\ \ 3, -1,\ \ 2, -3,\ \ 3\big),\ \mathbf{v}_2 = \big(-2, -3,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2\big),\\
\mathbf{v}_3 &= \big(\ \ 0,\ \ 3, -3,\ \ 3,\ \ 0,\ \ 1\big),\ \mathbf{v}_4 = \big(\ \ 1,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 0, -2\big),\\
\mathbf{v}_5 &= \big(\ \ 1,\ \ 2, -3, -1,\ \ 3, -2\big),\ \mathbf{v}_6 = \big(-1, -3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 3\big),\\
\mathbf{v}_7 &= \big(-1, -2,\ \ 0, -2,\ \ 1, -3\big).
\end{aligned}$$

(Die Vektoren wurden hier zu besseren Übersichtlichkeit ausnahmsweise als Zeilen geschrieben.)

LÖSUNG:

a) Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn das homogene LGS

$$0 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad \text{also} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

nur die trivale Lösung hat. In Aufgabe (G 7c)) wurde bereits die Zeilenstufenform ermittelt, woraus hervorgeht, dass dieses LGS eindeutig lösbar ist.

b) Wieder muss man überprüfen, ob das zugehörige LGS eindeutig lösbar ist:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 14 & 26 & 27 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -16 & -54 & -4 & 0 \\ -3 & -6 & 6 & 80 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da sich die Matrix diese LGS nur in einem Eintrag von der in Aufgabe (G 9) unterscheidet kann man zunächst genauso vorgehen, wie dort. Man erhält also

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ 7 & 14 & 26 & 27 & 8 & \\ 2 & 7 & 7 & 4 & 2 & \\ -2 & -4 & -16 & -54 & -4 & \\ -3 & -6 & 6 & 80 & 0 & \end{array}\right) \overset{\text{(G9)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ & 3 & 1 & 4 & 0 & \\ & & 5 & 27 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & -1 & 0 & \end{array}\right) \overset{Z4 \leftrightarrow Z5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ & 3 & 1 & 4 & 0 & \\ & & 5 & 27 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Offenbar hat das Gleichungssystem einen Rang von 4. Es gibt also einen freien Parameter, mithin ist die Lösung nicht eindeutig und die Vektoren sind linear abhängig.

c) Sieben Vektoren im $\mathbb{R}^6$ sind immer linear abhängig, da die Dimension des gesamten Raums nur 6 ist.

Ergänzung zur Lösung:
Zum besseren Verständnis der Matrixschreibweise, die in Aufgabe (G 11) eingeführt wurde, ist hier noch einmal das Gaussverfahren für die Gleichungssysteme in den Teilaufgaben a) und b) angegeben. Links steht jeweils die Transformationsmatrix, rechts die Matrix, auf die sie angewendet wird, auf die Spalte mit 0-Einträgen wurde verzichtet.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 14 & 26 & 27 & 8 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & -16 & -54 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 6 & 80 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 27 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -54 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & 80 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 27 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -54 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & 80 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(G 14)

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt.

Lösung:
Mit rechter Seite b von oben schreiben wir $[T^{(s)}\|A^{(s)}|b]$, wobei $T^{(s)}$ die auf $A^{(s)}$ anzuwen-

denden Zeilentransformationen sind:

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\
-1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\
1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc||ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & -4/3 & -3 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5/3 & 1/3 & -3 \\
0 & 1/5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 5/3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc||ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & -4/3 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\
0 & 0 & 7/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7/5 & -8/5 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc||ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & -4/3 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right).$$

Das LGS ist also überbestimmt und nicht erfüllbar, $L = \emptyset$.

(G 15)

Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}
-2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
2 & -2 & 3 & 2 & -2 & -3 \\
2 & -3 & -3 & -1 & 0 & -1 \\
3 & 0 & -3 & -2 & 3 & -3
\end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt!

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & -3 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -3 & -1 & 0 & -1 & 3\\
3/2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -3 & -2 & 3 & -3 & 2
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 2 & -3 & -2 & 0\\
0 & -6/5 & 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & -1 & -1 & 0 & 3\\
0 & -9/10 & 0 & 1 & 0 & -9/2 & -6 & -2 & 3/2 & -3/2 & 2
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 2 & -3 & -2 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -31/5 & -17/5 & 13/5 & 12/5 & 3\\
0 & 0 & -69/62 & 1 & 0 & 0 & -69/10 & -19/5 & 21/5 & 3/10 & 2
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 124 & 0 & -5 & 1 & 2 & -3 & -2 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1054/5 & 0 & 0 & -31/5 & -17/5 & 13/5 & 12/5 & 3\\
0 & 0 & 0 & -62 & 0 & 0 & 0 & -1/62 & 81/62 & -147/62 & -83/62
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & 0 & -10/31 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 5/31 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 159 & -296 & -166\\
0 & 0 & -5/31 & 0 & 0 & 0 & -31/5 & 0 & -1364/5 & 2511/5 & 1426/5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -81 & 147 & 83
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
1 & -3/5 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 87 & -161 & -92\\
0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 115 & -215 & -120\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 44 & -81 & -46\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -81 & 147 & 83
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc||cccccc|c}
-1/2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & -20\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -23 & 43 & 24\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 44 & -81 & -46\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -81 & 147 & 83
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 16 & 10\\
0 & 1 & 0 & 0 & -23 & 43 & 24\\
0 & 0 & 1 & 0 & 44 & -81 & -46\\
0 & 0 & 0 & 1 & -81 & 147 & 83
\end{array}\right)$$

Der Lösungsraum kann also angegeben werden als

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\\ 24\\ -46\\ 83 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -16\\ 23 & -43\\ -44 & 81\\ 81 & -147\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5\\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_5, x_6 \in \mathbb{R}.$$

Hausübungen

Bemerkung: Weil das Lösen von linearen Gleichungssystemen oft und bei sehr vielen Problemen benötigt wird sind die Aufgaben dazu umfangreicher als sonst. Sie erhalten dafür aber auch mehr Hausaufgabenpunkte. Alle Aufgaben in dieser Übung sind - soweit dies nicht notwendig ist - ***ohne* Zeilentausch** durchzuführen. Falls ein Zeilentausch notwendig ist, tauschen Sie mit der obersten Zeile, in welcher in bearbeiteter Spalte keine Null steht. Um die Korrektur im zeitlich Machbaren zu halten werden wir Punkte abziehen, wenn Sie dies nicht beachten.

(H 9) (5 Punkte)

Gegeben seien die beiden Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ E_2 &: 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{aligned}$$

Diese Ebenen schneiden sich. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden $g = E_1 \cap E_2$ an!

Lösung:

Für Punkte $P \in g$ muss gelten

$$P \hat{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x_1,\, x_2,\, x_3 \text{ sind Lösungen des LGS } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Durch die Umformung $Z2 - 3Z1$ erhält man die Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{T}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{array}\right), \quad \text{wobei } T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Es gibt einen freien Parameter $r = x_3$. Es gilt dann

$$x_2 = -\frac{1}{3}(-2 + 7r) = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}r, \quad x_1 = 1 - 3r - 2x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}r.$$

Die Schnittgerade g hat damit die Parameterform

$$g : \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } r \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent dazu ist die Parameterdarstellung

$$g : \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } r' \in \mathbb{R}.$$

(H 10) (8 Punkte)

Gegeben ist folgendes homogenes LGS

$$\begin{pmatrix} -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 22 & 16 & 21 & 19 & 27 & 17 \\ 18 & 14 & 20 & 22 & 20 & 20 \\ -7 & -9 & -11 & -6 & -10 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Bringen Sie dieses LGS mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform! Verwenden Sie dabei die Matrizenschreibweise aus (G 11), um Umformungen anzugeben. Welchen Rang hat das LGS?

Lösung:

Links steht jeweils die Transformationsmatrix, Rechts die Matrix, auf die sie angewendet wird.

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 16 & 21 & 19 & 27 & 17 \\ 18/11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 & 14 & 20 & 22 & 20 & 20 \\ -7/11 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -9 & -11 & -6 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 & -3 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & -4/11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8/11 & -14/11 & -28/11 & -14/11 & -32/11 \\ 0 & -18/11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -36/11 & -30/11 & 39/11 & -19/11 & -1/11 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 & -3 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/11 & 16/11 & -18/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60/11 & 237/11 & -37/11 & 197/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 11/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 3/2 & -7/2 & 5/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/11 & 16/11 & -18/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60/11 & 237/11 & -37/11 & 197/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 11/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 3/2 & -7/2 & 5/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/11 & 16/11 & -18/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -11/14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11/2 & -8 & 11/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc||cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/11 & 16/11 & -18/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -85/84 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -255/14 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 0 & -2 & -5 & -11 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 6/11 & 16/11 & -18/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In der letzten Zeile steht die Zeilenstufenform der Matrix. Man sieht, dass das LGS den Rang 5 hat.

(H 11) (3 Punkte)

Großvater, Mutter und Tochter beschreiben ihr Alter wie folgt: der Großvater ist bereits heute um das zweifache Alter der Mutter vor einem Jahr älter als seine Enkelin, in 25 Jahren wird diese aber zusammen mit ihrer Mutter genauso alt sein, wie er sein wird. Im Moment ist der Großvater um das Vierfache des Alters der Tochter in einem Jahr älter als die Mutter.
Wie alt sind Großvater, Mutter und Tochter?

LÖSUNG:

Auswerten des Texts führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 25 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right) \overset{T}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right) \overset{T'}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{array}\right),$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $59, 27, 7$ für das Alter von Großvater, Mutter und Tochter kann nun leicht bestimmt werden.

(H 12) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen des parameterabhängigen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei auftretende Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt.

LÖSUNG:

Transformation in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & a-1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2+a & 2 \\ 0 & -1-\frac{1}{3}a & 1 & 0 & 3+a & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2+a & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{3}(a+5) & -\frac{2}{3}a \end{array}\right)$$

Es sind die Fälle $a \in \{0, -5\}$ gesondert zu betrachten:

$a = 0$**:** In der letzten Zeile steht nun die Nullzeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das LGS hat noch Rang 2 und ist unterbestimmt, mit Lösungen

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$a = -5$**:** das LGS ist nun überbestimmt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{array}\right),$$

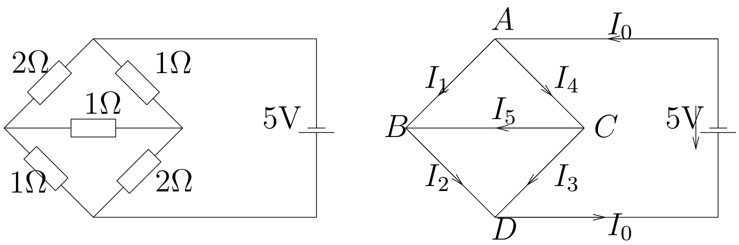
es existieren wegen der letzten Zeile keine Lösungen.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -5\}$**:** das LGS hat hier vollen Rang und ist eindeutig lösbar. Die Lösung bestimmt sich zu

$$\frac{2}{5+a}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(H 13) (9 Punkte)

Gegeben sei folgende Brückenschaltung, bestehend aus fünf Widerständen und einer 5V Spannungsquelle.



Berechnen Sie die Stromstärken $I_0, \ldots, I_5$ und den Gesamtwiderstand der Brücke!
Verwenden Sie beim Lösen des linearen Gleichungssystems mit Gauß die Matrizenschreibe aus (G 11), um Zeilenumformungen auszudrücken!
Hinweise: Man beachte das Ohmsche Gesetz $U = RI$, sowie die Kirchhoffschen Regeln:

- An jedem Knoten ist die Summe der Ströme gleich Null.
- An jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich Null.

Lösung:

Anwenden der Kirchhoffschen Regeln führt auf folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|ccccccl}
\text{A} & I_0 & -I_1 & & & -I_4 & & = 0 \\
\text{B} & & I_1 & -I_2 & & & +I_5 & = 0 \\
\text{C} & & & & -I_3 & +I_4 & -I_5 & = 0 \\
\text{D} & -I_0 & & +I_2 & +I_3 & & & = 0 \\
\text{ABC} & & 2I_1 & & & -I_4 & -I_5 & = 0 \\
\text{BCD} & & & -I_2 & +2I_3 & & -I_5 & = 0 \\
\text{ACD} & & & & 2I_3 & +I_4 & & = 5
\end{array}$$

Hierbei wurden zur besseren Übersicht die Einheiten unterdrückt: Auf rechten Seite wären dies V, und für die Koeffizienten des LGS Ω, mit den Stromstärken in A.

Durch Anwenden des Gaußalgorithmus mit den unten aufgeführten Transformationsmatrizen $T_1, \ldots, T_5$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \overset{T_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{T_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \overset{T_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \overset{T_4}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \overset{T_5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform liest man nun schnell die Stromstärken ab:

$$I_5 = \frac{5}{7}, \quad I_4 = \frac{9 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{15}{7}, \quad I_3 = \frac{5}{7} - \frac{15}{7} = \frac{10}{7},$$
$$I_2 = +\frac{2 \cdot 10}{7} - \frac{5}{7} = \frac{15}{7}, \quad I_1 = \frac{15}{7} - \frac{5}{7} = \frac{10}{7}, \quad I_0 = \frac{10}{7} + \frac{15}{7} = \frac{25}{7}.$$

(Sämtliche Werte in Ampere.) Für den Gesamtwiderstand ergibt sich damit

$$R_{\text{ges}} = \frac{U_{\text{ges}}}{I_{\text{ges}}} = \frac{5}{25/7} \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{7}{5}\Omega.$$

(H 14) (4 Punkte)

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems an

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt!

LÖSUNG:

$$\left(\begin{array}{ccccc||ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc||ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc||ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & -3/7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 8/7 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 14 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/7 \end{array}\right).$$

An der Zeilenstufenform erkennt man, dass das LGS nicht lösbar ist. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge $\emptyset$.

(H 15) (5 Punkte)

Gegeben seien drei Vektoren $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Matrix $(\mathbf{v_1 v_2 v_3})$, d.h. die Matrix mit diesen Vektoren als Spalten. Wie hängt die Rangveränderung von $(\mathbf{v_1 v_2 v_3})$ gegenüber $(\mathbf{v_1 v_2})$, also der Matrix mit $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ als Spalten, mit der Lösbarkeit des inhomogenen LGS

$$(\mathbf{v_1 v_2})\mathbf{x} = \mathbf{v_3}$$

zusammen?

LÖSUNG:

Es gibt zwei Möglichkeiten:

- **Der Rang ändert sich**: Die Matrix $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ hat also Rang 1 oder 2, währed die Matrix $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ Rang 2 bzw. 3 hat. Dies bedeutet, dass $\mathbf{v_3}$ linear unabhängig von $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ ist. Das bedeutet aber, dass es nicht möglich ist, reelle Zahlen x_1, x_2, x_3 mit

$x_3 \neq 0$ zu finden, so dass $x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + x_3\mathbf{v_3} = 0$ ist. Insbesondere ist es dann nicht möglich, x_1', x_2' zu finden, so dass $x_1'\mathbf{v_1} + x_2'\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} = 0$. Mit anderen Worten, $\big(\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}\big)\mathbf{x} = \mathbf{v_3}$ ist nicht lösbar.

- **Der Rang bleibt gleich**: In diesem Fall ist $\mathbf{v_3}$ linear abhängig von $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$. Das bedeutet, dass das homogene LGS

$$\left(\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}\mathbf{v_3}\right)\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

weitere Lösungen neben der Nullösung besitzt. Man findet also reelle Zahlen x_1', x_2', x_3', mit $x_1'\mathbf{v_1} + x_2'\mathbf{v_2} + x_3'\mathbf{v_3} = 0$ und $x_3' \neq 0$. Dann hat auch

$$\big(\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}\big)\mathbf{x} = \mathbf{v_3} \qquad \text{eine Lösung, nämlich } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1'/x_3' \\ -x_2'/x_3' \end{pmatrix}.$$