Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 15.10.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Arithmetik

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(i) \quad 2\frac{1}{4}+\frac{15}{3} \qquad (ii) \quad \frac{2}{7}+\frac{4}{13}$$

$$(iii) \quad \frac{2}{X-1}-\frac{X}{X^2-1} \qquad (iv) \quad X+\frac{1}{X}\left(1-2X^2\right)$$

LÖSUNG:

$$(i) \quad 7\frac{1}{4} \qquad (ii) \quad \frac{26+28}{91}=\frac{54}{91}$$

$$(iii) \quad \frac{2(X+1)-X}{(X-1)(X+1)}=\frac{X+2}{X^2-1} \qquad (iv) \quad \frac{1}{X}-X=\frac{1-X^2}{X}$$

(G 2) Summen und Produkte

a) Bestimmen Sie die Werte folgender Summen und Produkte:

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{5}(i+1) \qquad (ii) \quad \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{300}\sum_{l=k}^{300}\sin\left(k^2+l\right)=\sum_{l=1}^{300}\sum_{k=1}^{l}\sin\left(k^2+l\right).$$

LÖSUNG:

a)

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{5}(i+1)=(0+1)+(1+1)+(2+1)+(3+1)+(4+1)+(5+1)$$
$$=1+2+3+4+5+6=21.$$

$$(ii) \quad \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)=\sum_{m=1}^{3}\left[(0-0)+(m-2)+(2m-4)\right]$$
$$=\sum_{m=1}^{3}(3m-6)=(3-6)+(6-6)+(9-6)=0.$$

b) Auf der Linken Seite der steht:

$$\begin{array}{rll} \sin(1^2+1)+\sin(1^2+2) & +\cdots+\sin(1^2+300) & \\ +\sin(2^2+2) & +\cdots+\sin(2^2+300) & \\ \ddots & \quad\vdots & \\ & +\sin(300^2+300). & \end{array}$$

Auf der rechten Seite steht:

$$\begin{array}{llll} \sin(1^2+1) & & & \\ +\sin(1^2+2) & +\sin(2^2+2) & & \\ + \quad \vdots & & \ddots & \\ +\sin(1^2+300) & +\sin(2^2+300)+\cdots & & +\sin(300^2+300). \end{array}$$

Wenn man Spalten und Zeilen vertauscht, sieht man, dass auf beiden Seiten das Gleiche steht.

(G 3) Rekursive Definitionen

a) Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n, geschrieben $n!$, wird folgendermaßen definiert:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)!n & \text{für } n > 0 \end{cases}.$$

Berechnen sie $n!$ für die natürlichen Zahlen $n = 1, \ldots, 6$.

b) Die Folge der *Fibbonaci-Zahlen* wird folgendermaßen definiert: Man setzt $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Die $n$te Fibbonacci Zahl ist dann für $n > 1$ definiert als $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

- Berechnen Sie F_5.
- Überlegen Sie sich, ob man diese Definition auch auf beliebige ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ erweitern kann. Was wäre demnach F_{-2}?

LÖSUNG:

1. Man berechnet leicht folgende Werte:

$n =$	1	2	3	4	5	6
$n! =$	1	2	6	24	120	720

2. • Mit Hilfe der rekursiven Definition berechnet man leicht

$$F_5 = F_4 + F_3 = (F_3 + F_2) + (F_2 + F_1) = \\ = (F_2 + F_1) + 2(F_1 + F_0) + F_1 = 5F_1 + 3F_0 = 5.$$

Übersichtlicher ist es jedoch, die Zahlen $F_1, \ldots, F_5$ nacheinander, also *iterativ* zu berechnen:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	1	2	3	5

- Die Definition lässt sich tatsächlich auch auf $n < 0$ erweitern. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 = F_1 = F_0 + F_{-1} &= 0 + F_{-1} \quad &\Rightarrow\ F_{-1} = 1 \\ 0 = F_0 = F_{-1} + F_{-2} &= -1 + F_{-2} \quad &\Rightarrow\ F_{-2} = -1. \end{aligned}$$

(G 4)

Für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ seien die Zahlen $C(n,k)$ rekursiv definiert durch

$$C(n,k) := \begin{cases} 1 & \text{für } (n,k) = (0,0), \\ 0 & \text{falls } k < 0 \text{ oder } n < k, \\ C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie mit der Rekursionsformel die Einträge in Abbildung 1.

(G 5)

Sei die Aussage $\mathcal{A}(n), n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

a) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{A}(n)$ für $n = 0$ wahr ist (*Induktionsstart*).

b) Zeigen Sie mit $\mathcal{A}(n)$ dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist. n soll hierbei fest aber beliebig sein (*Induktionsschritt*).

LÖSUNG:

I-Start: für $n = 0$ ist $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 = 2^{n+1} - 1$, also $\mathcal{A}(0)$ wahr.
I-Schritt: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k \overset{\mathcal{A}(n)}{=} 2^{n+1} + (2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 1$, also $\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1)$. $\square$

(G 6)

In dieser Aufgabe soll der binomische Satz durch Induktion bewiesen werden. Aussage $\mathcal{A}(n), n \in \mathbb{N}$, sei

$$\mathcal{A}(n): \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

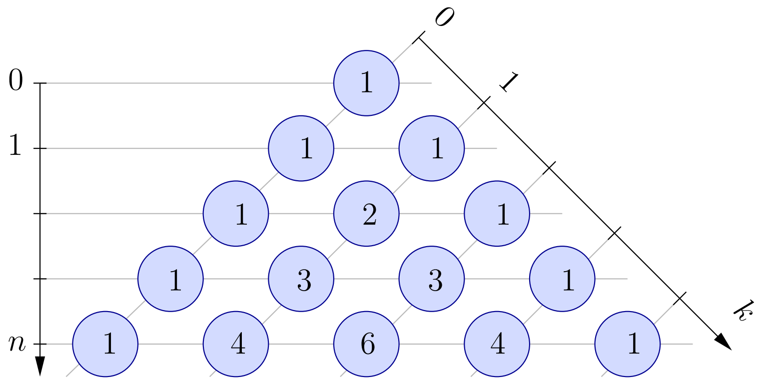

Abbildung 1: Rekursiv definierte $C(n,k)$. $C(n,k)$ steht in Zeile $n+1$, Spalte $k+1$, wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$ und nur $k = 0, \ldots, n$ aufgeführt sind.

a) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{A}(n)$ für $n = 0$ wahr ist (*Induktionsstart*).

b) Zeigen Sie mit Rekursion (1) und indem Sie $\mathcal{A}(n)$ verwenden, dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist. n soll hierbei fest aber beliebig sein (*Induktionsschritt*).

LÖSUNG:

I-Start: für $n = 0$ gilt $(x+y)^0 = 1 = C(0,0) = C(0,0)x^0y^0$.
I-Schritt: angenommen $\mathcal{A}(n)$ ist wahr, dann gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n &\overset{\mathcal{A}(n)}{=} \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n+1-k} \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} C(n,k-1)x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} C(n,k)x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k} \left[C(n,k-1) + C(n,k)\right] \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1,k)x^k y^{n+1-k},\end{aligned}$$

also ist auch $\mathcal{A}(n+1)$ wahr. $\square$

Hausübungen

(H 1) (4 P)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(i)\quad \frac{-3}{7}+\frac{4}{5} \qquad (ii)\quad \frac{1}{121}+\frac{-10}{11}$$
$$(iii)\quad \frac{4}{X+1}+\frac{2}{X+2} \qquad (iv)\quad 3-X+\frac{(X^2-3X+2)(X-3)}{(X-1)(X-2)}$$

Lösung:

$$(i)\quad \frac{28-15}{35}=\frac{13}{35} \qquad (ii)\quad \frac{1-110}{121}=-\frac{109}{121}$$
$$(iii)\quad \frac{4(X+2)+2(X+1)}{(X+1)(X+2)}=\frac{6X+10}{(X+1)(X+2)} \qquad (vi)\quad 3-X+\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(X-1)(X-2)}=0$$

(H 2) (2 + 2 P)

a) Schreiben Sie in $\sum$- bzw. $\prod$-Notation:

$$1+3+5+\cdots+45+47= \qquad , \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{432}=$$

b) Berechnen Sie folgende Terme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1) \qquad (ii)\quad \prod_{k=1}^{4}\sum_{i=3}^{k}(k-i)^2.$$

Lösung:

a)

$$\sum_{m=0}^{23}2m+1, \qquad \prod_{i=1}^{4}\frac{1}{3^{i-1}2^i}=\prod_{i=1}^{4}3^{1-i}2^{-i}$$

b)

$$\begin{aligned}(i)\ \sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1)&=\prod_{k=1}^{3}(k^2-1)+\prod_{k=2}^{3}(k^2-1)\\ &=(1^2-1)+3(3^2-1)=0+3\cdot 8=24.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ \prod_{k=1}^{4}\sum_{i=3}^{k}(k-i)^2&=\\ &=\left[\sum_{i=3}^{1}(1-i)^2\right]\times\left[\sum_{i=3}^{2}(2-i)^2\right]\times\left[\sum_{i=3}^{3}(3-i)^2\right]\times\left[\sum_{i=3}^{4}(4-i)^2\right]\\ &=0\times 0\times\underbrace{\left[(3-3)^2\right]}_{=0}\times\left[(4-3)^2+(4-4)^2\right]=0\end{aligned}$$

(H 3) Vollständige Induktion (3+3 P)

a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n\geq 1$ die Zahl $2^{2n}-1$ durch 3 teilbar ist.

b) Beweisen Sie, dass für jedes natürliche $n \geq 1$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

LÖSUNG:

- **Induktionsanfang** $n = 1$**:** $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.
  Induktionsschritt $n \to n+1$**:** Man benutzt hierzu Aufgabe (G 5):

  $$2^{2(n+1)} - 1 = (2^{2n+2}) - 1 \overset{(G5)}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{2n-1} 2^k + 2^{2n} + 2^{2n+1} \overset{(G5)}{=} 2^{2n} - 1 + 2^{2n}(1+2).$$

  Nach *Induktionsvoraussetzung* ist $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar, also ist auch die Summe $(2^{2n} - 1) + 3 \cdot 2^{2n}$ durch 3 teilbar.
  (*Bermekung:* Etwas direkter kann man im Induktionsschritt einfach mit $4(2^n - 1) + 3 = 2^{n+2} - 1$ und der Induktionsvoraussetzung argumentieren.)
- **Induktionsanfang** $n = 1$**:** $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$.
  Induktionsschritt $n \to n+1$**:**

  $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 =$$

  nach *Induktionsvoraussetzung* ist dies gleich

  $$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2 n^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{(n+1)^2 n^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ = \frac{(n+1)^2 n^2 + 4(n+1)^2(n+1)}{4} &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

(H 4) Multiplikation einmal anders (6 P)

Bereit im alten Ägypten kannte man folgendes Verfahren, zwei natürliche Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren:

1. Man schreibt a und b nebeneinander in die erste Zeile.
2. Auf die linke Seite, unter a schreibt man nun in jeder Zeile nacheinander das Ergebnis der ganzzahligen Division der darüberstehenden Zahl durch 2. Beispielsweise schreibt man in die zweite Zeile links $a/2$ falls a gerade war und sonst $(a-1)/2$. Man hört auf, nachdem man die 1 als Ergebnis aufgeschrieben hat.
3. Auf der rechten Seite, unter b, schreibt man nacheinander in jede Zeile, in der links schon eine Zahl steht, das doppelte der darüberstehenden Zahl, also $2b$, $4b$ und so weiter.
4. Nun streicht man auf der rechten Seite alle Zahlen aus, neben denen eine gerade Zahl steht (auch b, falls a gerade ist). Die verbliebenen Zahlen auf der rechten Seite addiert man. Ihre Summe liefert ist das Ergebnis, $P(a, b)$.

Beweisen Sie durch *Ordnungsinduktion* nach a, dass für jede natürliche Zahl $b > 0$ tatsächlich $P(a, b) = ab$ gilt.
Anleitung: Zeigen Sie im Induktionsschritt, dass aus Gültigkeit der Aussage

$$\mathcal{A}(\tilde{a}) : \quad \text{„Für jedes } b \in \mathbb{N},\ b \neq 0, \text{ gilt } P(\tilde{a}b) = ab.\text{“}$$

für jede natürliche Zahl $\tilde{a} < a$ die Gültigkeit der Aussage $\mathcal{A}(a)$ folgt.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, den Beweis für gerades und ungerades a getrennt durchzuführen.

LÖSUNG:

Der Beweis erfolgt durch Ordnungsinduktion mit der Annahme $\mathcal{A}(\tilde{a})$ gilt für jedes $\tilde{a} < a$, mit anderen Worten „Für jedes $\tilde{a} < a$ und jedes $b > 0$ gilt $P(\tilde{a}, b) = \tilde{a}b$“.
Induktionsanfang:
Für $a = 1$ gilt offenbar $P(a, b) = b$.
Für $a = 2$ hat man in der zweiten Zeile 1 und $2b$ stehen. Man streicht b und erhält $P(a, b) = 1 \cdot 2b = 2b$.
Induktionsschrit:
Ist a gerade, so wird b aus der ersten Zeile gestrichen, in der zweiten Zeile steht $a/2$ und $2b$. Es gilt also $P(a, b) = P(a/2, 2b)$. Aus der *Induktionsannahme ($\mathcal{A}(a/2)$ ist wahr)* folgt nun aber, dass $P(a/2, 2b) = \frac{a}{2}2b = ab$ ist.

Ist a ungerade, so geht auch b in das Ergebnis mit ein und es gilt
$P(a, b) = P((a - 1)/2, 2b) + b$. Mit der Induktionsanname ($\mathcal{A}((a - 1)/2)$ ist wahr) erhält man nun

$$P(a, b) = P\left((a - 1)/2, 2b\right) + b \overset{\text{i.A.}}{=} 2b\frac{a - 1}{2} + b = b(a - 1) + b = ba.$$