Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 04.02.2009

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 46) (Partielle Integration)

Berechne die folgenden Integrale durch partielle Integration

a) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$,

b) $\int_0^1 (\cosh^2(x), \arctan(x)) \, dx$.

LÖSUNG:

a) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \pi^2 + 2 \left((x \sin x)_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx \right) = \pi^2 - 4$.

b) Es gilt $\int_0^1 (\cosh^2(x), \arctan(x)) \, dx = (\int_0^1 \cosh^2(x) \, dx, \int_0^1 \arctan(x) \, dx)$.

Für den ersten Eintrag hat man

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cosh^2(x) \, dx &= \int_0^1 \cosh(x) \cosh(x) \, dx \\ &= [\sinh(x) \cosh(x)]_0^1 - \int_0^1 \sinh^2(x) \, dx \\ &= \sinh(1) \cosh(1) + \int_0^1 1 - \cosh^2(x) \, dx \\ &= 1 + \sinh(1) \cosh(1) - \int_0^1 \cosh^2(x) \, dx, \end{aligned}$$

somit folgt

$$\int_0^1 \cosh^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\sinh(1) \cosh(1) + \frac{1}{2} \right).$$

Wählt man $u(x) = \arctan(x)$ und $v(x) = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x) \, dx &= [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \arctan(1) - \left[\frac{1}{2} \ln |1 + x^2| \right]_0^1 = \pi/4 - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Daher gilt es

$$\int_0^1 (\cosh^2(x), \arctan(x))\, dx = (\frac{1}{2}\left(\sinh(1)\cosh(1) + \frac{1}{2}\right), \pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2).$$

(G 47) (Substitution)

Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitution

a) $\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ mit $a > 0$,

b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} + j\frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$.

LÖSUNG:

a) Wir substituieren $x = x(u) = a \sin u$ mit $u \in [-\pi/6, \pi/6]$. Da $\partial x / \partial u(u) = a \cos u > 0$ und $u = u(x) = \arcsin \frac{x}{a}$ ist, erhält man $\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{a \cos u}{a \cos u} du = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} du = \pi/3$.

b) Es gilt $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} + j\frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx + j \int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$.
Wir substituieren $u = \ln x$, so dass $du = \frac{1}{x} dx$. Daher

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx == \int \frac{1}{u}\, du = \ln u(x) + c$$

und

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx = [\ln u(x)]_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Wir substituieren $u = \ln t$, so dass $du = \frac{1}{t} dt$. Daher

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\, dt = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3}$$

und

$$\int_e^{e^2} \frac{(\ln t)^2}{t}\, dt = \left[\frac{u(t)^3}{3}\right]_e^{e^2} = \left[\frac{(\ln t)^3}{3}\right]_e^{e^2} = \frac{7}{3}.$$

Daher gilt es $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} + j\frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \ln 2 + j\frac{7}{3}$.

(G 48) (Partialbruchzerlegung)

Bestimme die folgenden Integrale mit der Methode der Partialbruchzerlegung:

a)

$$\int_2^3 \frac{4x^2 + 15x - 15}{x^3 + 2x^2 - 3x}\, dx,$$

b)

$$\int_0^1 \frac{2x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

LÖSUNG:

a) Wir stellen zunächst fest, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms. Auserdem besitzt das Nennerpolynom die Darstellung

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x\,(x^2 + 2x - 3) = x\,(x-1)(x+3)$$

und verfügt somit über die drei verschiedenen Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$. Wir erhalten daher die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 + 15x - 15}{x^3 + 2x^2 - 3x} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+3} \\ &= \frac{x^2(A_1 + A_2 + A_3) + x(2A_1 + 3A_2 - A_3) - 3A_1}{x^3 + 2x^2 - 3x}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 + A_3 &= 4 \\ 2A_1 + 3A_2 - A_3 &= 15 \\ -3A_1 &= -15\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A_1 = 5, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -2$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 15x - 15}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx &= \int \frac{5}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{2}{x+3}\,dx \\ &= 5\ln|x| + \ln|x-1| - 2\,\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

Daher gilt es

$$\int_2^3 \frac{4x^2 + 15x - 15}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx = -2\ln 6 + 2\ln 5 + 5\ln 3 - 4\ln 2.$$

b) Wir stellen zunächst fest, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms. Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist hier $\dfrac{2x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{(x+1)} + \dfrac{A^2}{(x+1)^2} + \dfrac{Bx + D}{(x^2+1)}$.
Mulitplikation mit dem Nenner liefert

$$2x^2 + 2x + 4 = (x+1)(x^2+1)A_1 + (x^2+1)A_2 + (x+1)^2(Bx + D)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$0x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (A_1 + B)x^3 + (A_1 + A_2 + 2B + D)x^2 + (A_1 + B + 2D)x + (A_1 + A_2 + D).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A_1 + B &= 0 \\ A_1 + A_2 + 2B + D &= 2 \\ A_1 + B + 2D &= 2 \\ A_1 + A_2 + D &= 4\end{aligned}$$

mit der Lösung $A_1 = 1, A_2 = 2, B = -1, C = 1$.Somit gilt für das Integral

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx =$$
$$\int \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{-x}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)} dx =$$
$$\ln|x+1| - \frac{2}{(x+1)} + \arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c.$$

Also erhält man

$$\int_0^1 \frac{2x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx = 1/2 \ln 2 + 1 + \pi/4.$$

Hausübungen

(H 48) (Partielle Integration)

(3+4P)

Bestimme die folgenden Integrale durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^4 x\,dx,$

b) $\displaystyle\int_1^e (xe^{-x}, 2x\ln(x))\,dx.$

Lösung:

a) Partielles Integrieren liefert

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx &= -\sin^3 x\cos x - \int 3\sin^2 x\cos x(-\cos x)dx\\ &= -\sin^3 x\cos x - \int 3\sin^2 x(\sin^2 x - 1)dx.\end{aligned}$$

Stellt man die Gleichung nach $\int \sin^4 x\,dx$ um, so erhält man

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx.$$

Wiederholt man das selbe Argument noch einmal, so sieht man

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int 1\,dx\right) = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x.$$

Man bekommt daher

$$\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = (-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x)\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

b) Es gilt $\displaystyle\int_1^e (xe^{-x}, 2x\ln(x))\,dx = (\int_1^e xe^{-x}\,dx, \int_1^e 2x\ln(x)\,dx).$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^e xe^{-x}\,dx &= \underbrace{-e^{-x}}_{f(x)}\underbrace{x}_{g(x)}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{(-e^{-x})}_{f(x)}\cdot\underbrace{1}_{g'(x)}\,dx\\ &= -e^{1-e} + \int_1^e e^{-x}\,dx = -e^{1-e} - e^{-x}\Big|_1^e = 2e^{-1} - e^{-e}(e+1).\end{aligned}$$

Bei dem zweiten Eintrag wählen wir $g(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = 2x$ und setzen dann

$g'(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = x^2$ ein:

$$
\begin{aligned}
\int_1^e 2x\ln(x)\,dx &= \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\,dx \\
&= (e^2\ln(e) - 1^2\ln(1)) - \int_1^e x\,dx \\
&= e^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^e = e^2 - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Daher gilt es $\int_1^e (xe^{-x}, 2x\ln(x))\,dx = (2e^{-1} - e^{-e}(e+1), \frac{e^2+1}{2})$.

(H 49) (Substitution)

(2+5P)

Bestimme die folgenden Intergrale mittels Substitution:

a) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$,

b) $\int_0^1 \frac{1}{\cosh x + 1} + j\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

LÖSUNG:

a) Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ und anschließender partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 2te^t\,dt = 2te^t\Big|_1^2 - 2\int_1^2 e^t\,dt = 2e^2.$$

b) Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{\cosh x + 1} + j\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\cosh x + 1}\,dx + j\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

Mit der Substitution $x = \ln t$ gilt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cosh x + 1}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1}\,dx = \int \frac{1}{\frac{t+\frac{1}{t}}{2} + 1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1+2t}\,dt \\
&= \int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{2}{t+1} + c = -\frac{2}{e^x+1} + c.
\end{aligned}
$$

Daher ist $\int_0^1 \frac{1}{\cosh x + 1}\,dx = -\frac{2}{e^x+1}\Big|_0^1 = -\frac{2}{e+1} + 1 = \frac{e-1}{e+1}$.

Anwendung der Substitution $t = x^2 + 2x + 2$ ergibt

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int_2^5 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_2^5 = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Daher hat man $\int_0^1 \frac{1}{\cosh x + 1} + j\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{e-1}{e+1} + j(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

(H 50) (Partialbruchzerlegung)

(4+2P)

Bestimme die folgenden Integrale mit der Methode der Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} dx,$

b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{x^2 - x - 6}\, dx.$

LÖSUNG:

a) Polynomdivision liefert $\dfrac{x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} = x^2 + x + \dfrac{9x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 6x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1}$.
Ansatz für eine Partialbruchzerlegung des echt rationalen Teils ist wegen $x^5 - x^4 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)(x^2+1)$:

$$\frac{9x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 6x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)} + \frac{Bx + D}{x^2 + 1}$$

und durch ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man

$$\frac{9x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 6x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x+1)} + \frac{4x + 5}{x^2 + 1}$$

Nun kann wie folgt integriert werden:

$$\int \frac{x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} dx =$$
$$\int x^2 + x + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x+1)} + \frac{4x+5}{x^2+1} dx =$$
$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2+1| + 5\arctan x + c$$

Dann gilt es $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} dx = 28/3 + 2\ln 2 - 3\ln 3 + 3\ln 4 + 2\ln 10 - 2\ln 5 + 5(\arctan 3 - \arctan 2)$.

b) Wir stellen zunächst fest, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms. Ausserdem besitzt das Nennerpolynom die Darstellung

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

und verfügt somit über die zwei verschiedenen Nullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Wir erhalten daher die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - x - 6} &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} \\ &= \frac{x(A_1 + A_2) + 2A_1 - 3A_2}{x^2 - x - 6}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 &= 0 \\ 2A_1 - 3A_2 &= 1\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A_1 = \frac{1}{5}, \quad A_2 = -\frac{1}{5}$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{1}{x^2 - x - 6}\, dx &= \frac{1}{5} \int_4^9 \frac{1}{x-3}\, dx - \frac{1}{5} \int_4^9 \frac{1}{x+2}\, dx \\ &= \frac{2}{5} \ln 6 - \frac{1}{5} \ln 11. \end{aligned}$$