Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 21.01.2009

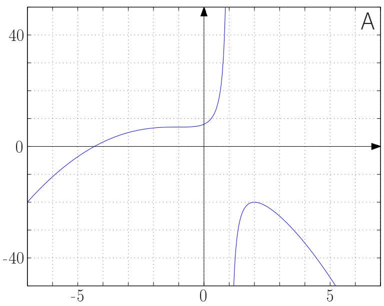
Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

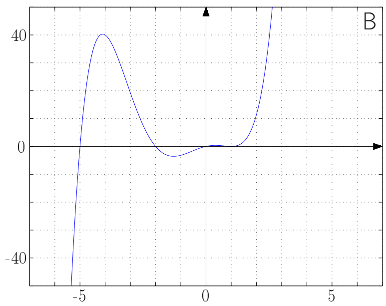
11. Übung mit Lösungshinweisen

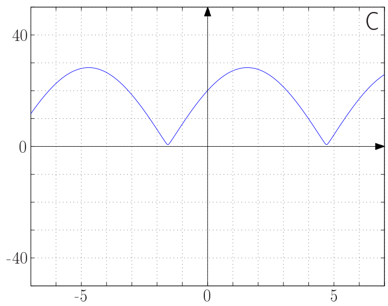
Gruppenübungen

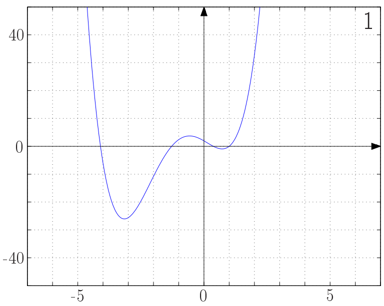
(G 40) (Graphische Darstellung von Ableitungen)

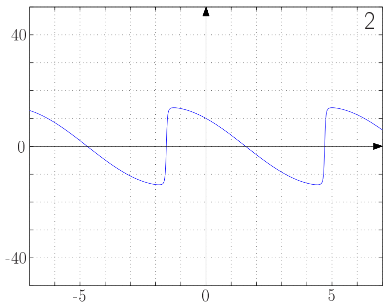
Ordne jeweils eine mit Buchstaben kodierte Funktion ihrer mit Zahlen kodierten Ableitung zu.

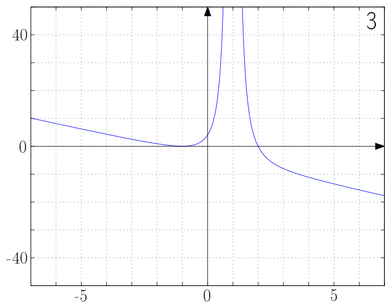












LÖSUNG:

Es sind die Paare A-3, B-1 und C-2.

(G 41) (Extremstellen)

Untersuche das Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx, \;\; f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen.

LÖSUNG:

Lokale Extremstellen müssen $f'(x_0) = 0$ erfüllen. Hier $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3b$. Also müssen wir $0 = x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{9} + b$ lösen. Also $x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - b}$. Wir sehen: für $\frac{a^2}{9} < b$ gibt es überhaupt keine Extremstellen, da dann die Wurzel nicht existiert. Für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Kandidaten $x_0 = -\frac{a}{3}$. In diesem Fall ist $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2/3 = 3(x + a/3)^2 \geq 0$. Da die Funktion f ausser in $\mathbb{R} \setminus 0$ streng monoton steigt, ist $-\frac{a}{3}$ ein Sattelpunkt.

Es gilt $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Im Fall $\frac{a^2}{9} > b$ liegen daher entweder zwei Sattelpunkte vor oder zuerst (links) ein lokales Maximum, dann ein lokales Minimum. Um dies zu entscheiden, setzen wir eine Stelle zwischen diesen beiden in f' ein. Wegen $-\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3} < -\frac{a}{3} < +\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3}$ bietet sich $\frac{-a}{3}$ an. Es ist $f'(-\frac{a}{3}) = b - \frac{a^2}{3}$. Wir haben $f'(-\frac{a}{3}) < 0$, da $\frac{a^2}{3} > \frac{a^2}{9} > b$.

Es gilt also: f hat genau dann zwei Extremstellen, wenn $\frac{a^2}{9} > b$ gilt; für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Sattelpunkt; sonst gibt es nichts.

(G 42) (Taylor-Polynom)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimme das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätze den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$ ab.

Lösung:

Die Ableitungen sind

$f(x) = \sin(3x)\; f'(x) = 3\cos(3x)\; f^{(2)}(x) = -9\sin(3x),\; f^{(3)}(x) = -27\cos(3x),\; f^{(4)}(x) = 81\sin(3x).$
$f(\pi) = 0,\; f'(\pi) = -3,\; f^{(2)}(\pi) = 0,\; f^{(3)}(\pi) = 27.$

Also:

$$T_3(x) = 0 - \frac{3}{1!}(x-\pi) + \frac{0}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{27}{3!}(x-\pi)^3\,.$$

Mit dem Restglied nach Lagrange $R_3(x,0) = f(x) - T_3(x) = \frac{81\sin(3\zeta)}{4!}(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4, \zeta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ ergibt sich $|R_4(x,0)| = \frac{81}{4!}1(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4$. Für den Fehler folgt also $R_4(\frac{3\pi}{4}) \leq \frac{81}{4!}(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4 = 1.2842019$.

Hausübungen

(H 42) (Taylorpolynom)

(6P)

Berechne das Taylorpolynom $T_3(x,1)$ zu $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-\ln x)$. Berechne ebenfalls $T_3(\frac{2}{3},1)$ und schätze den zugehörigen Fehler ab.

LÖSUNG:

Die ersten vier Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 2x-\ln(x)-1, \\ f^{(2)}(x) &= 2-\frac{1}{x}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{x^2}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Mit $f(1)=1$, $f^{(1)}(1)=1$, $f^{(2)}(1)=1$ und $f^{(3)}(1)=1$ erhält man

$$T_3(x,1)=1+(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Insbesondere ergibt sich $T_3(\frac{2}{3},1)=\frac{58}{81}$.

Für den Fehler erhält man

$$R_3\left(2/3,1\right)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{2}{3}-1\right)^4=-\frac{2}{4!\cdot\xi^3}\cdot\frac{1}{3^4}$$

mit $\xi\in]\frac{2}{3},1[$. Somit gilt

$$|R_3\left(2/3,1\right)|\leq\frac{2}{4!\cdot(2/3)^3}\cdot\frac{1}{3^4}=\frac{1}{288}.$$

(H 43) (Mittelwertsatz)

(4+4P)

a) Beweise die Ungleichung $e^x\geq 1+x$ für alle $x\in[0,\infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

b) Beweise die Ungleichung $\ln x\leq x-1$ für alle $x\geq 1$.

LÖSUNG:

a) Für $x=0$ ist die erste Ungleichung wahr, sei also $x>0$. Wir wenden den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a,b]=[0,x]$ an. Dann gibt es ein $\xi\in(0,x)$ mit

$$\frac{\exp(x)-\exp 0}{x-0}=\exp'(\xi)\Leftrightarrow e^x-e^0=e^\xi(x-0)$$

also $e^x=e^\xi x+1\geq x+1$. Dabei gilt die letzte Ungleichung, weil $e^0=1$ und e^x monoton wachsend ist.

b) Für $x = 1$ ist die Ungleichung erfüllt. Sei $x > 1$. Setze $y := x - 1$. Für $x \geq 1$ ist dann die erste Ungleichung auf y anwendbar: $e^y \geq y + 1$. Auf beiden Seiten können wir dann die ln Funktion anwenden, da ln streng monoton wachsend ist, haben wir $\ln e^y \geq \ln(y+1)$ also $x - 1 = y \geq \ln(y+1) = \ln x$.

(H 44) (Untersuchung von Funktionsgraphen)

(2+3+1P)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(F) = [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ und

$$f(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \cos(x^2).$$

a) Gebe alle lokalen und globalen Extrema von f in $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ an. Bestimme jeweils die Art der Extrema.

b) Zeige, dass die Funktion f im Interval $[\sqrt{\pi/4}, \sqrt{3\pi/4}]$ genau eine Nullstelle hat.

c) Skizziere die Funktion.

LÖSUNG:

a) Die erste Ableitung von f ist $f'(x) = -\sqrt{2}x + 2x\sin(x^2) = x(2\sin(x^2) - \sqrt{2})$. $f'(x) = 0$ auf $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ entweder, wenn $x = 0$ ist oder wenn $\sin(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es gilt $\sin(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ genau dann, wenn $x = \pm\sqrt{\pi/4}$ oder $x = \pm\sqrt{3\pi/4}$.

Die zweite Ableitung von f ist $f''(x) = -\sqrt{2} + 2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)$. Es gilt $f''(0) = -\sqrt{2} < 0$, $f''(\pm\sqrt{\pi/4}) = \pi/\sqrt{2} > 0$ und $f''(\pm\sqrt{3\pi/4}) = -3\pi/\sqrt{2} < 0$. Daher sind 0 und $\pm\sqrt{3\pi/4}$ lokale Maxima und $\pm\sqrt{\pi/4}$ lokale Minima der Funktion f. Da es $f(0) = 0$ und $f(\pm\sqrt{3\pi/4}) \approx 0,04$ gilt, sind $f(\pm\sqrt{3\pi/4})$ auch globale Maxima und $f(\pm\sqrt{\pi/4})$ globale Minima.

b) Es gilt $f(\sqrt{3\pi/4}) \approx 0,04$ und $f(\sqrt{\pi/4}) \approx -0,27$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens eine Nullstelle im $[\sqrt{\pi/4}, \sqrt{3\pi/4}]$. Da $f'(x) > 0$ für $x \in (\pi/4, 3\pi/4)$ ist, steigt f im $[\sqrt{\pi/4}, \sqrt{3\pi/4}]$ monotone, so dass genau eine Nullstelle existiert.

c) Mit Hilfe von a) und b) können wir jetzt die Funktion f skizzieren.