**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 14.01.2009

# Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

## 10. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 37) (Differenzierbarkeit und Betragsfunktion)**

Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$ auf Differenzierbarkeit für $x \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| = \begin{cases} x: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -x: & x < 0 \end{cases},$$

und somit ist

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -x^2: & x < 0 \end{cases}.$$

Auf dem Intervall $I_1 = (0, \infty)$ stimmt die Funktion $f$ mit der Abbildung $g_1: I_1 \to \mathbb{R}$, die durch die Zuordnungsvorschrift $g_1(x) = x^2$ gegeben ist, überein und ist somit differenzierbar auf $I_1$. Bezüglich des Intervalls $I_2 = (-\infty, 0)$ stimmt $f$ mit der Abbildung $g_2: I_2 \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = -x^2$ überein und ist daher auf $I_2$ ebenfalls differenzierbar. Es bleibt nur noch die Stelle $p = 0$ zu untersuchen.
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ist der Differenzenquotient von $f$ durch

$$\frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = |x|$$

gegeben, so daß sich aufgrund der Stetigkeit der Betragsfunktion die Differenzierbarkeit von $f$ an der Stelle $p = 0$ folgern läßt, da nunmehr der Grenzwert

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

existiert. Somit ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \begin{cases} 2x: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -2x: & x < 0 \end{cases}$
$= 2 \cdot |x|$.

**(G 38) (Differentiation)**

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$,

b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$,

c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$,

d) $p(x) = jxe^{jx}$, wobei $j$ die komplexe Eins ist.

LÖSUNG:

a) Hier wird die Produktregel

$$(p(x) \cdot q(x))' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

benötigt:

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

b) Die Quotientenregel

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{q^2(x)}$$

liefert die Ableitung

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{2\sin(x)}{x^3}.$$

c) Bei dieser Aufgabe helfen die Kettenregel

$$p(q(x))' = p'(q(x)) \cdot q'(x)$$

sowie die Darstellung $h(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$:

$$h'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x.$$

d) $p'(x) = je^{jx} + jx \cdot je^{jx} = (j - x)e^{jx}$.

**(G 39) (Relativer Fehler)**

Die Tangentenbussole hat diesen Namen, weil die Stromstärke $J$ proportional dem Tangens des Ablesewinkels $\alpha$ der Magnetnadel ist:

$$J = c \tan \alpha,$$

wobei c eine Apparatenkonstante bedeutet.

Schaetze den relativen Fehler $\frac{100 \cdot \Delta J}{J}\%$ ab, falls sich die Winkel $\alpha$ auf einen halben Grad genau ablesen. Bestimme den relativen Fehler in % für die Winkel $\alpha = 15°,\ \alpha = 30°$.

LÖSUNG:

Es ist

$$dJ = \frac{c}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

und somit der prozentuale Fehler

$$\frac{100 \cdot \Delta J}{J} \approx \frac{100 c \Delta\alpha}{c \tan \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{200 \Delta\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Lassen sich die Winkel $\alpha$ auf einen halben Grad genau ablesen, so ist im Bogenmass $|\Delta\alpha| = \frac{1}{2} 0,01745$ und der relative Fehler wird

$$\frac{1,745}{|\sin 2\alpha|}\%,$$

also z.B. bei einem Winkel von $\alpha = 15°$ gleich $3,5\%$, bei einem Winkel $\alpha = 30\%$ gleich $2\%$.

## Hausübungen

**(H 38) (Monotonie differenzierbarer Funktionen )**

**(6P)**

Beweise die Ungleichung

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}$$

für $0 < x < y < \pi$.

LÖSUNG:

Man zeigt, dass die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf $(0, \pi)$ monotone fallend ist. Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ ist, ist die Aussage bewiesen.

$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Die Funktion $x^2$ ist auf $(0, \pi)$ positiv. Sei $g(x) = x \cos x - \sin x$. Es gilt $g(0) = 0$, $g(\pi) = -\pi$ und $g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$, d.h. $g(x)$ ist monotone fallend für alle $x \in (0, \pi)$. Daraus folgt, dass $g(x) < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ ist. Damit ist bewiesen, dass $f'(x) < 0$ auf $(0, \pi)$ ist.

**(H 39) (Eindeutigkeitssatz)**

**(5P)**

Zeige, daß für $x \in (-1, 1)$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

LÖSUNG:

Zunächst gilt die Gleichung in 0 wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ für $x = 0$:

$$\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben

$$(\arcsin(x)' + \arccos(x)') = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

d.h. $\arcsin(x)' = -\arccos(x)'$ für alle $x \in (-1, 1)$. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt die Behauptung.

**(H 40) (Gleichung der Tangente)**

**(4P)**

Bestimme alle Punkte $(x, y(x))$ auf dem Graphen der Funktion $y(x) = x^3$, in denen die Tangente parallel zu der Sekante ist, die die Punkte (-1,-1) und (2,8) verbindet.

LÖSUNG:

Wir brauchen alle $x \in \mathbb{R}$, für die $y'(x) = \frac{y(2)-y(-1)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3$ gilt. Aus $y'(x) = 3x^2 = 3$ ergibt sich $x = \pm 1$. Also sind die gesuchten Punkte (-1,-1) und (1,1).

**(H 41) (Lineare Approximationen)**

**(1+2+2P)**

Eine lineare Approximation $g$ einer differenzierbaren Funktion $f$ im Punkt $p$ ist $g(x, p) = \Delta x f'(p) + f(p),\ \Delta x = x - p$.

a) Berechne für den Punkt $x$ den Fehler $r(\Delta x)$ der linearen Approximation $g(x,p)$, d.h. also $r(\Delta x) = g(x,p) - f(x)$.

b) Bestimme $\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x)$ und $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x}$.

c) Sei $f_3(x) = x^3$. Bestimme die lineare Approximation $g_3$ im Punkt $x = 1$ sowie den zugehörigen Fehler $r_3(\Delta x) = g_3(x,1) - f_3(x)$. Begründe, warum sich auch für den allgemeinen Fall $f_n = x^n$ für $r_n$ Polynome ergeben und diese keine Summanden mit $(\Delta x)^0$ und $(\Delta x)^1$ enthalten können.

Lösung:

a) Es ist $g(x,p) = \Delta x f'(p) + f(p)$ und damit $r(\Delta x) = g(x,p) - f(x) = \Delta x f'(p) + f(p) - f(x)$.

b) Da $f$ differenzierbar und damit auch stetig ist, gilt $f(p + \Delta x) \to f(p)$ für $\Delta x \to 0$, also insgesamt $\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = 0$. Aus der Differenzierbarkeit von $f$ erhält man $\frac{f(p+\Delta x) - f(p)}{\Delta x} - f'(p) \to 0$, somit gilt auch $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x}$.

c) Es ist $f_3(1) = 1$ und $f_3'(1) = 3$, also gilt $g_3(x,1) = 1 + 3\Delta x$. Damit ergibt sich $r_3(\Delta x) = -3\Delta x^2 - \Delta x^3$.

   Im allgemeinen Fall ergibt sich $f_n(1) = 1$ und $f_n'(1) = n$, also $g_n(x,1) = 1 + n\Delta x$. Da auch $f_n(x) = f_n(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^n$ ein Polynom ist, ergibt sich auch für $r_n(\Delta x)$ ein Polynom. Würde dieses Summanden mit $(\Delta x)^0$ und $(\Delta x)^1$ enthalten, so könnte nicht $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r_n(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ gelten.