12. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Extrema unter Nebenbedingungen

Aufgaben

A 1 Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Verwende die Lagrange'schen Multiplikatoren, um ein mögliches Maximum der Funktion

$$f(x_1, ..., x_n) := \sin(x_1) + ... + \sin(x_n)$$

für $x_1 + ... + x_n = 2\pi$, $0 \leq x_j \leq \pi$, $j = 1, ..., n$ zu bestimmen. Ausnahmsweise soll hier eine anschauliche Begründung, dass das Maximum nicht in einem Punkt $(x_1, ..., x_n) \in \partial[0, \pi]^n$ (also auf dem Rand) angenommen wird, genügen.
Was ist die geometrische Bedeutung von $f(x_1, ..., x_n)$?

Ist x ein Maximum, so muß für alle i gelten

$$\lambda = \lambda \frac{\partial \sum x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \cos(x_i).$$

Also gilt $\cos x_i = \cos x_j$ für $i, j \in \{1, ..., n\}$. Weil der $\cos$ auf $(0, \pi)$ streng monoton ist, folgt $x_i = x_j$ für $i = 1, ..., n$ Aus der Nebenbedingung erhält man

$$2\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i = n x_1$$

also $x_i = \frac{2\pi}{n}$. Da die Menge

$$\{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi,\ x_i \in [0, \pi]\}.$$

kompakt ist, muss die stetige Funktion f auf ihr ein Maximum annehmen. Der einzige kritische Punkt in der Menge

$$\{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi,\ x_i \in (0, \pi)\}$$

ist $(\frac{2\pi}{n}, ..., \frac{2\pi}{n})$. Es muss nun ausgeschlossen werden, dass es aus $\partial[0, \pi]^n$ einen größeren Wert gibt. Wir geben aber nur eine anschauliche Begründung.

Der Wert $f(x_1, ..., x_n)$ mit $\sum x_i = 2\pi$ ist 2mal der Flächeninhalt des n-Ecks mit den Ecken $e^{i \sum_{i=1}^{k} x_i}$ mit $k = 1, ..., n$. Dass das regelmäßige n-Eck die größte Fläche hat, ist einzusehen. Der Beweis hierfür ist zwar nicht unbedingt schwierig, aber technisch. Er er kann zum Beispiel per Induktion nach n und mit Hilfe der Tatsache, dass die Funktion $x \sin \frac{2\pi}{x}$ monoton ist geführt werden.

A 2 Es seien $p, q \in (0, \infty)$ fest gewählt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimme das Minimum von

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := xy = 1.$$

Folgere hieraus auch $\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv$.

Ist (x, y) ein Minimum, so hat man

$$\lambda y = x^{p-1}, \quad \lambda x = y^{p-1}, \quad xy = 1 \ \Rightarrow\ x, y \neq 0.$$

Durch Auflösen erhält man leicht $x = y = 1$. Also ist $(1, 1)$ der einzige kritische Punkt. Weiterhin gilt, falls $x \to \infty$, dass $f(x, y) \to \infty$ und für $x \to 0$ folgt aus $xy = 1$, dass $y \to \infty$ also $f(x, y) \to \infty$. Analog für y. Also liegt in $(1, 1)$ ein Minimum.

Sei nun

$$x := \frac{u}{(uv)^{\frac{1}{p}}}, \quad y := \frac{v}{(uv)^{\frac{1}{q}}}.$$

Dann gilt $uv = 1$ und wie eben berechnet $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \geq 1$. Umformen liefert $\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv$.

A 3 Bestimme das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

Ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt 0 *läßt sich eindeutig durch die Angabe einer Ecke* (x, y, z) *beschreiben. Offensichtlich hat ein achsenparalleler Quader mit maximalem Volumen im Ellipsoid seien Mittelpunkt in* 0 *und seine Ecken auf dem Rand des Ellipsoids, d.h. für die Ecken* (x, y, z) *gilt* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$*. Wir betrachten die Ecke des Quaders mit* $x, y, z \geq 0$*. Das Volumen ist* $V(x, y, z) = 8xyz$*. Die Nebenbedingung ist* $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$*. Nun gilt*

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= (8yz, 8xz, 8xy)^T \\ \nabla f(x, y, z) &= (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}).\end{aligned}$$

Aus der Langrange'schen Multiplikatorenregel folgt

(i) $8y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}$

(ii) $8x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{b^2}$

(iii) $8x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{c^2}$

Die drei Gleichung ergeben

$$8x_0y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

also

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Aus $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ *(die NB!) folgt somit* $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{3}$*, also ist die Lösung*

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c.$$

Da die Funktion $V(x, y, z)$ *stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge* $A := \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *ihr Maximum und ihr Minimum an. Ist* $x = 0, y = 0$ *oder* $z = 0$*, so ist* $V(x, y, z) = 0$*. Ist* $V(x, y, z)$ *das Maximum von* V *auf* A*, so gilt* $x, y, z > 0$*. Die Lagrangesche Multiplikatorenregel greift also und der Punkt* (x_0, y_0, z_0) *ist das Maximum.*