Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Juli 2006

11. Tutorium zur Analysis II
Aufgaben

A 1 Der Satz über implizite Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = \sin(x+y) + e^{xy} - 1\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0,0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.
2. Zeigen Sie, dass die erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist in der Nähe von $x = 0$.
3. Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiten Grades von φ mit Entwicklungspunkt $x = 0$.

Lösung:

(a) Wir benutzen den Satz über implizite Funktionen. f ist stetig differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) + ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) + xe^{xy}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weil $f(0,0) = 0$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos 0 + 0 = 1 \neq 0$, daher können wir die Gleichung $f(x,y) = 0$ eindeutig nach y for (x,y) nahe $(0,0)$ auflösen. D.h. es gibt ein $\delta > 0$ und eine eideutig bestimmte Funktion stetig differenzierbare Funktion $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$.

(b) φ ist stetig differenzierbar und

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}\right|_{y\,=\,\varphi(x)} = -\frac{\cos(x+\varphi(x)) + \varphi(x)e^{x\varphi(x)}}{\cos(x+\varphi(x)) + xe^{x\varphi(x)}} \tag{1}$$

für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Weil φ stetig differenzierbar ist auf $(-\delta, \delta)$, haben wir dann auch dass φ' stetig differenzierbar ist auf $(-\delta, \delta)$. Also ist φ zweimal stetig differenzierbar
Jetzt berechnen wir $\varphi''(x)$. f ist auch zweimal stetig differenzierbar, daher

$$\begin{aligned} f''(x,y) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(x+y) + y^2 e^{xy} & -\sin(x+y) + (1+xy)e^{xy} \\ -\sin(x+y) + (1+xy)e^{xy} & -\sin(x+y) + x^2 e^{xy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$, gilt $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$. Differenzieren mit der Kettenregel liefert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\varphi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'\right)\varphi' + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'' = 0,$$

$$\varphi''(x) = \left[-\frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\varphi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi')^2\right)\right](x, \varphi(x)). \tag{2}$$

(c) Mit (1) und $\varphi(0) = 0$, haben wir also $\varphi'(0) = -1$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, sowie (2) folgt $\varphi''(0) = 2$. Das Taylorpolynom der Ordnung zwei von φ mit Entwicklingspunkt 0 ist daher

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \frac{1}{2}\varphi''(0) \cdot x^2 = -x + x^2.$$

A 2 Der Satz über implizite Funktionen

Durch die Gleichung

$$\phi(x)^3 + 3\ \phi(x) + e^{\phi(x)} - x^2 - x = 1$$

und $\phi(0) = 0$ ist implizit eine Funktion ϕ gegeben. Berechne $\phi'(0)$ und $\phi''(0)$. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades von ϕ mit Entwicklungspunkt 0?

Lösung: Wir differenzieren formal nach x und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 3\phi(x)^2\ \phi'(x) + 3\phi'(x) + e^{\phi(x)}\ \phi'(x) - 2x - 1 &= 0 \\ 6\phi(x)[\phi'(x)]^2 + 3\phi(x)^2\ \phi''(x) + 3\phi''(x) + e^{\phi(x)}\left([\phi'(x)]^2 + \phi''(x)\right) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Für $\phi(0) = 0$ gilt also

$$3\phi'(0) + 1\ \phi'(0) - 1 = 0 \Rightarrow 4\phi'(0) = 1$$

$$3\phi''(0) + 1\left([\phi'(0)]^2 + \phi''(x)\right) - 2 = 0 \Rightarrow 4\phi''(0) - 2 + \frac{1}{16} = 0$$

Also $\phi'(0) = \frac{1}{4}$ und $\phi''(0) = \frac{31}{64}$. Die Taylorentwicklung lautet somit $T_2(x) = 0 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\frac{31}{64}x^2$.