10. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Wegunabhängigkeit bei komplexen Kurvenintegralen

Für komplexe Funktionen ist die Theorie der Kurvenintegrale eleganter als im $\mathbb{R}^n$. Mit diesem Thema werden wir uns im nächsten Semester ausgiebig befassen. Hier ein kleiner Vorgeschmack. Benötigt werden die Ergebnisse aus Tutorium 6 über komplexe Differenzierbarkeit und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Definition. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir das komplexe Kurvenintegral über die komplexe Variable z durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt,$$

wobei die Multiplikation im Integral nicht als Skalarprodukt sondern als Multiplikation in $\mathbb{C}$ zu verstehen ist.

Aufgaben

A 1 Berechne das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^m\, dz \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{Z},$$

wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ eine Parametrisierung des Einheitskreises ist.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^m\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{imt} i e^{it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\cos((m+1)t)dt + i\int_0^{2\pi} i\sin((m+1)t)dt \\
&= \begin{cases} i\frac{1}{m+1}[\sin((m+1)t) - i\cos((m+1)t)]_0^{2\pi} = 0 & \textit{falls } \; m \neq -1 \\ \int_0^{2\pi} i\, dt + i\int_0^{2\pi} 0\, dt = 2\pi i & \textit{falls } \; m = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

A 2 Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Kurve. Wir fassen die komplexe Funktion $f = u + iv$ als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, genauer

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ v(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Beweise

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ -v(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v(x+iy) \\ u(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite als reelle Kurvenintegrale zu verstehen sind.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t))dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t))\, dt + i\int_a^b (u(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) + v(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t))dt \\
&= \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ -v(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v(x+iy) \\ u(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A 3 Sei $G \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig reell differenzierbar, d.h. aufgefasst als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Zeige, dass das komplexe Wegintegral
$$\int_\gamma f \; dx$$
genau dann über alle stetig differenzierbaren geschlossenen Wege γ verschwindet, wenn f komplex differenzierbar ist.
2. Wenn f also komplex differenzierbar ist, dann verschwinden Real- und Imaginärteil des Kurvenintegrals über alle stetig differenzierbaren geschlossenen Wege γ. Das bedeutet es existieren Stammfunktionen F_1 und F_2 mit
$$\operatorname{grad} F_1 = (u, -v) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} F_2 = (v, u).$$
Zeige, dass $F := F_1 + iF_2$ komplex differenzierbar ist mit $F' = f$.
Hierbei ist $F'(z)$ wie im rellen über einen Differenzenquotienten definiert.

Das Wegintegral verschwindet genau dann, wenn sein Realteil und sein Imaginärteil verschwinden. Diese sind durch die rellen Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ -v(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \int_\gamma \begin{pmatrix} v(x+iy) \\ u(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Nach Satz 11.17 und 11.15 verschwinden diese Integrale genau dann für alle Kurven γ, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x+iy) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x+iy) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x+iy) = \frac{\partial}{\partial x} u(x+iy)$$

gilt. Das sind gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Diese sind genau dann erfüllt, wenn f komplex differenzierbar ist.
2. Es gilt

$$J_F = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, das heißt F ist komplex differenzierbar. Die Anwendung von J_F auf eine komplexe Zahl entspricht der Multiplikation mit $u + iv = f$.

A 4 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{z^2}$. Zeige, dass es ein $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$. Berechne das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\, dz$, wobei γ irgendeine stetig differenzierbare Kurve von 1 nach $2 + i$ ist.

Wir raten $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2} = \frac{1}{2}e^{x^2+2ixy-y^2}$. Dann gilt

$$F_1(z) := \operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2}e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$
$$F_2(z) := \operatorname{Im} F(z) = \frac{1}{2}e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

Man rechnet aus

$$\begin{aligned}
\partial_x F_1(z) + i\partial_y F_1(z) &= xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) + i(-ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)) \\
&= xe^{x^2-y^2}(\cos(2xy) - i\sin(2xy)) - iye^{x^2-y^2}(-i\sin(2xy) + \cos(2xy)) \\
&= (x - iy)e^{x^2-y^2}e^{-2ixy} \\
&= \overline{ze^{z^2}} = \overline{f(z)} = u(z) - iv(z)
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\partial_x F_2 + i\partial_y F_2 = v + iu$. Also gilt

$$\operatorname{grad} F_1 = (u, -v) \quad \textit{und} \quad \operatorname{grad} F_2 = (v, u).$$

Somit verschwinden nach Satz 11.10 die beiden Integrale auf der rechten Seite in A2 und damit auch $\int_\gamma f(z)\,dz$ für jeden geschlossen stetig differenzierbaren Weg γ. Nach A3 folgt $F' = f$.
Alles zusammen ergibt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (F_1(2+i) - F_1(1)) + i(F_2(2+i) - F_2(1)) = F(2+i) - F(1) = \frac{1}{2}(e^{(2+i)^2} - e).$$