Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

27./28. Juni 2006

10. Tutorium zur Analysis II

Wegunabhängigkeit bei komplexen Kurvenintegralen

Für komplexe Funktionen ist die Theorie der Kurvenintegrale eleganter als im $\mathbb{R}^n$. Mit diesem Thema werden wir uns im nächsten Semester ausgiebig befassen. Hier ein kleiner Vorgeschmack. Benötigt werden die Ergebnisse aus Tutorium 6 über komplexe Differenzierbarkeit und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Definition. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir das komplexe Kurvenintegral über die komplexe Variable z durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt,$$

wobei die Multiplikation im Integral nicht als Skalarprodukt sondern als Multiplikation in $\mathbb{C}$ zu verstehen ist.

Aufgaben

A 1 Berechne das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^m \, dz \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{Z},$$

wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ eine Parametrisierung des Einheitskreises ist.

A 2 Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Kurve. Wir fassen die komplexe Funktion $f = u + iv$ als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, genauer

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ v(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Beweise

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ -v(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \int_\gamma \begin{pmatrix} v(x+iy) \\ u(x+iy) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite als reelle Kurvenintegrale zu verstehen sind.

A 3 Sei $G \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig reell differenzierbar, d.h. aufgefasst als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Zeige, dass das komplexe Wegintegral
$$\int_\gamma f \; dx$$
genau dann über alle stetig differenzierbaren geschlossenen Wege γ verschwindet, wenn f komplex differenzierbar ist.

2. Wenn f also komplex differenzierbar ist, dann verschwinden Real- und Imaginärteil des Kurvenintegrals über alle stetig differenzierbaren geschlossenen Wege γ. Das bedeutet es existieren Stammfunktionen F_1 und F_2 mit
$$\operatorname{grad} F_1 = (u, -v) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} F_2 = (v, u).$$
Zeige, dass $F := F_1 + iF_2$ komplex differenzierbar ist mit $F' = f$.
Hierbei ist $F'(z)$ wie im rellen über einen Differenzenquotienten definiert.

A 4 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{z^2}$. Zeige, dass es ein $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$. Berechne das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\, dz$, wobei γ irgendeine stetig differenzierbare Kurve von 1 nach $2 + i$ ist.