Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Juni 2006

9. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 Differenzierbarkeit bilinearer Abbildungen

Es seien V, W, X drei endlichdimensionale reelle Vektorräume und es sei eine Abbildung $B : V \times W \mapsto X$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1. $B(av + bv', w) = aB(v, w) + bB(v', w)$ für alle $a, b \in R$ und alle $v, v' \in V, w \in W$
2. $B(v, aw + bw') = aB(v, w) + bB(v, w')$ für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V, w, w' \in W$

Abbildungen mit diesen Eigenschaften heißen **bilinear**. Für bilineare Abbildungen B existiert ein $K > 0$, so dass die folgende Ungleichung für alle $v \in V, w \in W$ gilt:

$$\|B(v, w)\| \leq K\|v\| \, \|w\| \, .$$

Machen Sie sich klar, dass Skalarprodukte bilinear sind.

Seien nun V, W, X endlichdimensionale reelle Vektorräume. Zeigen Sie dass jede bilineare Abbildung $B : V \times W \mapsto X$ in jedem Punkt $(v, w) \in V \times X$ differenzierbar ist.

Lösung: Wie schon so oft halten wir uns nicht mit partiellen Ableitungen auf, sondern versuchen, die gesuchte lineare Abbildung aus der Definition der Differenzierbarkeit heraus direkt zu bestimmen. Dazu entwickeln wir mit $h_v \in V$ und $h_w \in W$

$$B(v + h_v, w + h_w) = B(v, w) + B(h_v, w) + B(v, h_w) + B(h_v, h_w)$$

Falls die Funktion B differenzierbar ist, muss $DB(v, w).(h_v; h_w) = B(h_v, w) + B(v, h_w)$ gelten, weil diese Komposition linear in h_v, h_w ist. Wir müssen noch die Restgliedabschätzung zeigen. Dazu bemerken wir zuerst, dass

$$\|(h_v; h_w)\| \geq K' \sqrt{\|h_v\|_V^2 + \|h_w\|_W^2} \quad \forall \, (h_v, h_w) \in V \times W$$

mit einem positiven $K' > 0$ angenommen werden kann, da alle Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent sind. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{B(h_v, h_w)}{\|(h_v; h_w)\|} &\leq K \, \frac{\|h_v\|_V \, \|h_w\|_W}{\|(h_v; h_w)\|} \\
&\leq \frac{K}{2} \, \frac{\|h_v\|_V^2 + \|h_w\|_W^2}{\|(h_v; h_w)\|} \qquad 2ab \leq a^2 + b^2 \\
&\leq \frac{K \, K'}{2} \, \frac{\|h_v\|_V^2 + \|h_w\|_W^2}{\sqrt{\|h_v\|_V^2 + \|h_w\|_W^2}} \\
&\leq \frac{K \, K'}{2} \sqrt{\|h_v\|_V^2 + \|h_w\|_W^2} \, .
\end{aligned}$$

Also auch

$$\lim_{\|(h_v; h_w)\| \to 0} \frac{B(h_v, h_w)}{\|(h_v; h_w)\|} = 0$$

Die bilineare Abbildung ist differenzierbar.

A 2 Die Exponentialfunktion von Matrizen

Es sei die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Potenzen X^n von X für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ kann man die folgende Matrix $\exp(tX)$ definieren

$$\exp tX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k .$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert und bestimmen Sie $\exp(tX)$ explizit. Bestimmen Sie die Ableitung der Abbilidung $t \mapsto \exp(tX)$, speziell an der Stelle $t = 0$. Ist diese Abbildung analytisch?

Lösung:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X^1 = X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^3 = X^2\, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -X$$

$$X^4 = X^2\, X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} X^{4k+1} &= X \\ X^{4k+2} &= X^2 \\ X^{4k+3} &= X^3 = -X \\ X^{4k+4} &= X^4 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist klar, da in jeder Komponente der Matrix konvergente Einträge stehen.

Ableitung nach t:

$$D_t \exp(tX) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einfach komponentenweises Ableiten der Matrix. Für $t = 0$ gilt

$$D_t \exp(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X$$

Die Abbildung $t \mapsto \exp(tX)$ ist sogar analytisch, denn jede einzelne Komponente ist analytisch (sie ist ja als Potenzreihe definiert).

A 3 Das Vektorprodukt und die Exponentialfunktion von Matrizen

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem aus der linearen Algebra bekannten Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die aus der vorherigen Aufgabe bekannte Gruppe $G = \{\exp(tX) : t \in [0, 2\pi)\}$ von Drehungen. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen sie die Ableitungen der Abbildungen $K_1 : t \mapsto \exp(tX).(v \times w)$ und $K_2 : t \mapsto \exp(tX).v \times \exp(tX).w$.

Man kann zeigen, daß die Ableitungen übereinstimmen, was wir jedoch nicht nachprüfen wollen. Was kann man daraus schließen.

Lösung: Da v, w nicht von t abhängen, lautet die Ableitung von $t \mapsto \exp(tX).(v \times w)$ gerade

$$D_t K_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Andererseits definiert das Vektorprodukt $\times$ eine bilineare Abbildung auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Die Ableitung berechnet sich nach der entsprechend verallgemeinerten Produktregel

$$D_t K_2(t) = \exp(tX).v \times D_t \exp(tX).w + D_t \exp(tX).v \times \exp(tX).w$$

Die beiden Ableitungen stimmen für jedes $t \in [0, 2\pi)$ überein (was man zeigen kann). Weil ausserdem $K_1(0) = v \times w = K_2(0)$ gilt, folgt aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, dass $K_1(t) = K_2(t)$ gilt, dass also

$$\exp(tX).(v \times w) = \exp(tX).v \times \exp(tX).w$$

Das Vektorprodukt ist invariant unter den Drehungen.