Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19. Juni 2006

9. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 Differenzierbarkeit bilinearer Abbildungen

Es seien V, W, X drei endlichdimensionale reelle Vektorräume und es sei eine Abbildung $B : V \times W \mapsto X$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1. $B(av + bv', w) = aB(v, w) + bB(v', w)$ für alle $a, b \in R$ und alle $v, v' \in V, w \in W$
2. $B(v, aw + bw') = aB(v, w) + bB(v, w')$ für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V, w, w' \in W$

Abbildungen mit diesen Eigenschaften heißen **bilinear**. Für bilineare Abbildungen B existiert ein $K > 0$, so dass die folgende Ungleichung für alle $v \in V, w \in W$ gilt:

$$\|B(v, w)\| \leq K\|v\|\,\|w\|\,.$$

Machen Sie sich klar, dass Skalarprodukte bilinear sind.

Seien nun V, W, X endlichdimensionale reelle Vektorräume. Zeigen Sie dass jede bilineare Abbildung $B : V \times W \mapsto X$ in jedem Punkt $(v, w) \in V \times X$ differenzierbar ist.

A 2 Die Exponentialfunktion von Matrizen

Es sei die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Potenzen X^n von X für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ kann man die folgende Matrix $\exp(tX)$ definieren

$$\exp tX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert und bestimmen Sie $\exp(tX)$ explizit. Bestimmen Sie die Ableitung der Abbilidung $t \mapsto \exp(tX)$, speziell an der Stelle $t = 0$. Ist diese Abbildung analytisch?

A 3 Das Vektorprodukt und die Exponentialfunktion von Matrizen

Wir betrachten den raum $\mathbb{R}^3$ mit dem aus der linearen Algebra bekannten Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die aus der vorherigen Aufgabe bekannte Gruppe $G = \{\exp(tX) : t \in [0, 2\pi)\}$ von Drehungen. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen sie die Ableitungen der Abbildungen $K_1 : t \mapsto \exp(tX).(v \times w)$ und $K_2 : t \mapsto \exp(tX).v \times \exp(tX).w$.

Man kann zeigen, daß die Ableitungen übereinstimmen, was wir jedoch nicht nachprüfen wollen. Was kann man daraus schließen.