Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Juni 2006

8. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 Funktionen von beschränkter Variation

Eine Funktion $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ heißt **von beschränkter Variation**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß für jede Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von $[a, b]$ gilt

$$V(g, Z) := \sum_{k=1}^{n} |g(z_k) - g(z_{k-1})| \leq M.$$

Ist g von beschränkter Variation, so heißt die Zahl

$$V_a^b(g) := \sup_Z V(g, Z)$$

die **Totalvariation** von g auf $[a, b]$. Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$ bezeichnet man mit $BV[a, b]$ (bounded variation).

1. Zeigen Sie: jede Treppenfunktion, jede monotone Funktion, jede Lipschitz-stetige Funktion auf $[a, b]$ gehört zu $BV[a, b]$
2. Ist jede stetige Funktion von beschränkter Variation?

   Lösung: Treppenfunktionen haben folgende Gestalt: es gibt Punkte $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ und Zahlen $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ so daß

$$f(x) = \begin{cases} c_0 & x \in [a_0, a_1] \\ c_i & x \in (a_i, a_{i+1}],\ i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Ist nun $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$, so ist klar: liegen z_{k-1}, z_k im gleichen Intervall $[a_0, a_1]$ bzw. $(a_i, a_{i+1}]$, so ist der Summand $|f(z_k) - f(z_{k-1})|$ von $V(f, Z)$ gleich 0. Hieraus folgt leicht, daß

$$V(f, Z) \leq \sum_{i}^{m} |c_i - c_{i-1}| .$$

Daher ist $f \in BV$. Wählt man $z_0 = a, z_{m+1} = b$ und für z_i jeweils gerade den Mittelpunkt des Intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ so ist für diese spezielle Zerlegung offenbar

$$V(f, Z) = \sum_{i}^{m} |c_i - c_{i-1}| .$$

so daß wir noch

$$V_a^b(f) = \sum_{i}^{m} |c_i - c_{i-1}|$$

erhalten.

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ etwa monoton wachsend (d.h. $(f(s) \leq f(t)$ für $s \leq t$) und sei $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$, dann ist

$$V(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} [f(z_k) - f(z_{k-1})] = f(b) - f(a) .$$

Hieraus folgt $f \in BV[a,b]$ mit

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a)\,.$$

Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ Lipschitzstetig, d.h. $\exists L > 0 : \quad |f(s) - f(t)| \leq L\,|s-t| \;\forall s,t$ und sei $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, dann ist

$$V(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| = L\,|b-a|$$

Also ist $f \in BV[a,b]$ mit

$$V_a^b(f) \leq L(b-a)\,.$$

Um zu sehen, daß nicht jede stetige Funktion von beschränkter Variation ist, genügt die Angabe eines Beispiels. Sei

$$f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\,\cos(\pi/x) & x > 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf $[0,1]$ stetig (warum?). Für die spezielle Zerlegung $Z = Z_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ von $[0,1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \\ &= \frac{1}{2n}\cos(2n\pi) + \sum_{i=1}^{2n-1} |\frac{1}{i}\cos(i\pi) - \frac{1}{i+1}\cos((i+1)\pi)| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} |\frac{1}{i}(-1)^i - \frac{1}{i+1}(-1)^(i+1)| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} (\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - 1\,, \end{aligned}$$

und da die harmonische Reihe divergiert, wächst $V(f,Z) = V(f,Z_n)$ für $n \to \infty$ über alle Grenzen.

Ist g von beschränkter Variation auf $[a,b]$ und $[c,d] \subset [a,b]$, so ist g auch von beschränkter Variation auf $[c,d]$ und es gilt

$$V_c^d(g) \leq V_a^b(g)\,.$$

Zeigen Sie folgende "Umkehrung" dieser Aussage:

3. Sei $a < c < b$ und $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ von beschränkter Variation. Dann ist $g \in BV[a,b]$ und es gilt

$$V_a^b(g) = V_a^c(g) + V_c^b(g)\,.$$

4. Zeigen Sie: Eine Funktion $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn Sie als Differenz zweier wachsender Funktionen dargestellt werden kann.
   Hinweis: Betrachten Sie auf $[a,b]$ die Funktion $f(x) := V_a^x(g)$.

Lösung: Wir zeigen zuerst, daß $g \in B[a,b]$ ist. Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ und $Z' := Z \cup \{c\}$, $Z_1 := Z' \cap [a,b]$, $Z_2 := Z' \cap [c,b]$. Dann sind Z_1 bzw. Z_2 Zerlegungen von $[a,c]$ und $[c,b]$ und wir erhalten

$$V(g,Z) \leq V(g,Z') = V(g,Z_1) + V(g,Z_2) \leq V_a^c(g) + V_c^b(g)$$

wobei die erste Abschätzung die Dreiecksungleichung liefert und die zweite Abschätzung von der beschränkten Variation von g auf $[a,c]$ und $[c,b]$ herrührt. Diese Ungleichung gilt für beliebiges Z, also ist $g \in BV[a,b]$ und außerdem gilt

$$V_a^b(g) \leq V_a^c(g) + V_c^b(g)$$

Wir zeigen noch die Gleichheit dieser Beziehung. Für jedes $\epsilon > 0$ findet man Zerlegungen Z_1 von $[a,c]$ bzw. Z_2 von $[c,b]$ mit

$$V(g, Z_1) \geq V_a^c(g) - \frac{\epsilon}{2}, \; V(g, Z_2) \geq V_c^b(g) - \frac{\epsilon}{2},$$

Für die Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2$ von $[a,b]$ ist dann

$$V(g, Z) = V(g, Z_1) + V(g, Z_2) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g) - \epsilon\,,$$

und damit erst recht

$$V_a^b(g, Z) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g) - \epsilon\,,$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt

$$V_a^b(g, Z) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g)$$

Dies ist die Behauptung.

(Wenn $g \in BV[a,b]$ ist, dann ist g die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen). Wir definieren die Funktion $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = a \\ V_a^x(g) & x \in (a,b] \end{cases}$$

Sei $a \leq x < y \leq b$. Dann gilt nach (3)

$$f(y) = V_a^y(g) = V_a^x(g) + V_x^y(g) \geq V_a^x(g) = f(x)$$

d.h. f wächst monoton. Auch die Funktion $h := f - g$ wächst monoton: Sind wieder x, y wie oben, so ist

$$h(y) - h(x) = f(y) - f(x) - (g(y) - g(x)) = V_x^y - (g(y) - g(x))$$

und dies ist ≥ 0, denn es ist für jede Zerlegung Z von $[x,y]$

$$|g(y) - g(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |g(z_i) - g(z_{i-1})| \leq V_x^y(g)\,.$$

Also sind sowohl f als auch h monoton wachsend, und aus $g = f - h$ folgt die Behauptung.

Zweiter Schritt: die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen liegt in $BV[a,b]$.

Aus Aufgabe 1 wissen wir, daß jede monoton wachsende Funktion in BV liegt. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es daher, die folgende Aussage zu zeigen: sind $f, g \in BV[a,b]$, so ist auch $f + g \in BV[a,b]$. Sei dazu Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} V(f+g, Z) &= \sum_{i=1}^{n} |(f+g)(z_i) - (f+g)(z_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1}) + g(z_i) - g(z_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(z_i) - g(z_{i-1})| \\ &= V(f, Z) + V(g, Z) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $f + g \in BV[a,b]$ und außerdem

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)\,.$$

Da monoton wachsende Funktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen aufweisen können, folgt aus der letzten Behauptung und aus dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium, daß Funktionen von beschränkter Variation Riemann-integrierbar sind.