Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Juni 2006

8. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 Funktionen von beschränkter Variation

Eine Funktion $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ heißt **von beschränkter Variation**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß für jede Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von $[a, b]$ gilt

$$V(g, Z) := \sum_{k=1}^{n} |g(z_k) - g(z_{k-1})| \leq M.$$

Ist g von beschränkter Variation, so heißt die Zahl

$$V_a^b(g) := \sup_Z V(g, Z)$$

die **Totalvariation** von g auf $[a, b]$. Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$ bezeichnet man mit $BV[a, b]$ (bounded variation).

1. Zeigen Sie: jede Treppenfunktion, jede monotone Funktion, jede Lipschitz-stetige Funktion auf $[a, b]$ gehört zu $BV[a, b]$
2. Ist jede stetige Funktion von beschränkter Variation?
   Ist g von beschränkter Variation auf $[a, b]$ und $[c, d] \subset [a, b]$, so ist g auch von beschränkter Variation auf $[c, d]$ und es gilt
   $$V_c^d(g) \leq V_a^b(g)\,.$$
   Zeigen Sie folgende "Umkehrung" dieser Aussage:
3. Sei $a < c < b$ und $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ von beschränkter Variation. Dann ist $g \in BV[a, b]$ und es gilt
   $$V_a^b(g) = V_a^c(g) + V_c^b(g)\,.$$
4. Zeigen Sie: Eine Funktion $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn Sie als Differenz zweier wachsender Funktionen dargestellt werden kann.
   Hinweis: Betrachten Sie auf $[a, b]$ die Funktion $f(x) := V_a^x(g)$.

Da monoton wachsende Funktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen aufweisen können, folgt aus der letzten Behauptung und aus dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium, daß Funktionen von beschränkter Variation Riemann-integrierbar sind.