7. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Globale Extrema

Aufgaben

A 1 Finde den kleinsten und den größten Wert der Funktion f auf der Menge A.

(a)
$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y), \quad A = [0,\pi] \times [0,\pi].$$

(b)
$$f(x,y) = x + y - 2\sin x \sin y, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq \pi\}.$$

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) Da die Funktion f auf der kompakten Menge A stetig ist, nimmt sie auf A den größten und den kleinsten Wert an. Wenn der Extremwert in einem inneren Punkt von A angenommen wird, dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Also rechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y(\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)) = \sin y \sin(2x+y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin x \sin(2y+x).$$

Da $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ ist, gilt

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ 2y + x = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2\pi \\ 2y + x = 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2\pi \\ 2y + x = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = \pi \\ 2y + x = 2\pi. \end{cases}$$

Daraus folgt $x = y = \frac{\pi}{3}$ oder $x = y = \frac{2\pi}{3}$. (Die Lösungen $x = 0$, $y = \pi$ und $x = \pi$, $y = 0$ fallen aus, da sie nicht im Inneren von A liegen.) Damit ist

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Da $f(x,y) = 0$ für alle Punkte (x,y) aus dem Rand von A, muss $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ das gleobale Maximum und $-\frac{3}{8}\sqrt{3}$ das globale Minimum sein.
(b) Da die Methode die gleiche wie in (a) ist, skizzieren wir nur die Lösung.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - 2\sin y \cos x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - 2\sin x \cos y = 0.$$

Daraus folgt
$$1 = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y).$$

Wegen $0 < x + y < \pi$ folgt $x + y = \frac{\pi}{2}$. Damit ist $1 - 2\cos x \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, d.h. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ oder $x = y = \frac{\pi}{4}$. Ausserdem ist $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - 1$.
Wir untersuchen jetzt f auf dem Rand von A.

$$f(0,y) = y, \quad (y \in [0,\pi]),$$
$$f(x,0) = x, \quad (x \in [0,\pi]),$$
$$f(x,\pi - x) = \pi - 2\sin x \sin(\pi - x) = \pi - 2\sin^2 x, \quad (x \in [0,\pi]).$$

Damit ist $0 = f(0,0)$ *der kleinste und* $\pi = f(0,\pi)$ *der größte Wert von* f *auf dem Rand von* A. *Da*

$$0 < \frac{\pi}{2} - 1 = f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) < \pi,$$

ist 0 *das globale Minimum und* π *das globale Maximum von* f *auf* A.
(c) Die Funktion f *ist stetig in* $(0,0)$:

$$|xy\ln(x^2+y^2)| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$

Da $\lim_{r\to 0} \frac{1}{2} r^2 |\ln r^2| = 0$ *(de l'Hospital) ist, ist auch*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy\ln(x^2+y^2)| = 0.$$

Außerdem erhalten wir $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *und* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. *Sei also* $(x,y) \neq (0,0)$. *Dann ist*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(x \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(y \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)) = 0.$$

Wenn $x = 0$, *dann ist* $y \ln y^2 = 0$, *also* $y = 0$, *weil der Punkt* $(0, \pm 1)$ *nicht im Inneren von* A *liegt. Sei also* $x \neq 0$ *und* $y \neq 0$. *Dann ist*

$$\frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{also} \quad x^2 = y^2.$$

Es folgt

$$\frac{2x^2}{2x^2} + \ln(2x^2) = 0, \quad \text{also} \quad x^2 = \frac{1}{2e}.$$

Also bekommen wir 4 Lösungen

$$(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}),$$

wobei

$$f(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e} \quad \text{und} \quad f(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = \frac{1}{2e}.$$

Ausserdem ist $f(0,0) = 0$ *und* $f(x,y) = 0$ *für* $x^2+y^2 = 1$. *Daraus folgt, dass* $-\frac{1}{2e}$ *das globale Minimum und* $\frac{1}{2e}$ *das globale Maximum ist.*

A 2 Entscheide, ob die Funktion f auf der Menge A ein globales Maximum oder ein globales Minimum besitzt. Falls ja, bestimme diese Extremwerte.

$$f(x,y) = (x-y)e^{-x^2-y^2}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0\}.$$

Sei $A_R := A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$. *Wir finden erst wie in Aufgabe 1, das Maximum und das Minimum von* f *auf* A_R. *Wir rechnen*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x-y)e^{-x^2-y^2}(-2x) + e^{-x^2-y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)e^{-x^2-y^2}(-2y) - e^{-x^2-y^2} = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{cases} -2x(x-y) + 1 = 0 \\ -2y(x-y) - 1 = 0, \end{cases}$$

das heißt $(2x+2y)(x-y) = 0$, *also* $x = y$ *oder* $y = -x$. *Der Fall* $x = y$ *entfällt, also ist* $y = -x$. *Also ist* $4x^2 = 1$. *Wegen* $y > 0$ *folgt* $x = -\frac{1}{2}$. *Dabei ist* $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

Sei nun $y = 0$. *Dann ist* $f(x, 0) = xe^{-x^2}$. *Also*

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-x^2}) = xe^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.
Sei jetzt $x^2 + y^2 \geq R^2$. *Dann ist*

$$|f(x, y)| = |x - y|e^{-x^2-y^2} \leq (|x| + |y|)e^{-(x^2+y^2)} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}.e^{-(x^2+y^2)}$$

Wähle jetzt R *so groß, dass für alle* $r \geq R$ *gilt*

$$\sqrt{2}re^{-r^2} < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Das geht, weil $\lim_{r\to\infty} \sqrt{2}re^{-r^2} = 0$ *ist. Dann ist* $|f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ *für* $x^2 + y^2 \geq R^2$, *und deshalb kann* f *für* $x^2 + y^2 \geq R$ *weder Maximum noch Minimum annehmen. Damit ist* $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ *das Maximum und* $-e^{-\frac{1}{2}}$ *das Minimum von* f *auf* A.