6. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Komplexe Differenzierbarkeit und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Indem wir Real- und Imaginärteil sowohl der Variablen als auch der Funktion betrachten, können wir f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Genauer:

$$f : x + iy \mapsto u(x + iy) + iv(x + iy),$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und u, v reellwertige Funktionen sind. Wenn man 1 mit $\binom{1}{0}$ und i mit $\binom{0}{1}$ identifiziert, kann man auch

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

schreiben. Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen verwenden, je nachdem mit welcher man besser rechnen kann.

Aufgaben

A 1 (i) Schreibe die linearen Abbildungen $A_1 : z \mapsto \overline{z}$ und $B : z \mapsto iz$ als reelle 2×2-Matrizen. Entscheide, ob die beiden Abbildungen auch $\mathbb{C}$-linear sind, das heißt, ob $A_k cx = cA_k x$ für $k = 1, 2$, und alle $c, x \in \mathbb{C}$ gilt.

(ii) Berechne die Jakobi-Matrizen der Abbildungen

$$z \mapsto |z|^2 \quad \text{und} \quad z \mapsto (z - i)z.$$

(i) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *$A_1$ ist nicht $\mathbb{C}$-linear, denn* $A_1(iz) = \overline{iz} = -i\overline{z} \neq iA_1(z)$. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *$A_2$ is $\mathbb{C}$-linear, weil die Multiplikaiton in $\mathbb{C}$ kommutativ ist.*

(ii) $f : z \mapsto |z|^2$, $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$g : z \mapsto (z - i)z$, *also* $g(x + iy) = (x^2 - y(y - 1)) + i(x(y - 1) + xy)$ *und damit gilt* $J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y + 1 \\ 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$.

A 2 Beweise, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.
Bestimme die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Sei $c := A1$. Dann gilt $Ax = A(x1) = xA1 = cx$.

$$(a + ib)(1 + 0i) = a + ib \quad \textit{und} \quad (a + ib)(0 + i) = -b + ia.$$

Also: Die Matrixdarstellung von $B : z \mapsto (a + ib)z$ ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

A 3 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ differenzierbar als Abbildung auf $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich ist die Ableitung $df(x_0 + iy_0)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beweise:
$df(x_0 + iy_0)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die sogenannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + iy_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + iy_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + iy_0)$$

erfüllt sind.

Sei $df(x_0+iy_0)$ $\mathbb{C}$-linear. Dann entspricht $df(x_0+iy_0)$ einer Multiplikation mit einer Konstanten $a+ib$, Also

$$df(x_0+iy_0)\binom{h_1}{h_2} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\binom{h_1}{h_2}.$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0+iy_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0+iy_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0) \end{pmatrix} = df(x_0+iy_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0+iy_0) = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0+iy_0).$$

Seien umgekehrt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Dann gilt

$$df(x_0+iy_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0) & -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0+iy_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0) \end{pmatrix}$$

was der Multipliaktion mit der komplexen Zahl $(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0+iy_0)) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0+iy_0)$ entspricht, und das ist natürlich $\mathbb{C}$-linear.

A 4 Sei wieder die Ableitung $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, das heißt, sie entspreche einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl c. Zeige, dass gilt

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - c \xrightarrow{z\to z_0} 0.$$

Wenn eine solche Zahl c exisitiert, heißt f komplex differenzierbar in z_0. Folgere, dass f genau dann komplex differenzierbar ist, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.

Weil f in z_0 Fréchet-differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + df(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0) = f(z_0) + c(z-z_0) + o(z-z_0).$$

Daraus erhält man

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - c = \frac{o(z-z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z\to z_0} 0.$$

Wenn umgekehrt f komplex differenzierbar ist, dann gilt $df(z_0)h = ch$. Dann ist offenbar $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, also sind nach A3 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.