Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30/31. Mai 2006

6. Tutorium zur Analysis II

Komplexe Differenzierbarkeit und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Indem wir Real- und Imaginärteil sowohl der Variablen als auch der Funktion betrachten, können wir f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Genauer:

$$f : x + iy \mapsto u(x + iy) + iv(x + iy),$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und u, v reellwertige Funktionen sind. Wenn man 1 mit $\binom{1}{0}$ und i mit $\binom{0}{1}$ identifiziert, kann man auch

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

schreiben. Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen verwenden, je nachdem mit welcher man besser rechnen kann.

Aufgaben

A 1 (i) Schreibe die linearen Abbildungen $A_1 : z \mapsto \overline{z}$ und $B : z \mapsto iz$ als reelle 2×2-Matrizen. Entscheide, ob die beiden Abbildungen auch $\mathbb{C}$-linear sind, das heißt, ob $A_k cx = cA_k x$ für $k = 1, 2$, und alle $c, x \in \mathbb{C}$ gilt.

(ii) Berechne die Jakobi-Matrizen der Abbildungen

$$z \mapsto |z|^2 \quad \text{und} \quad z \mapsto (z - i)z.$$

A 2 Beweise, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.
Bestimme die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

A 3 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ differenzierbar als Abbildung auf $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich ist die Ableitung $df(x_0 + iy_0)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beweise:
$df(x_0 + iy_0)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die sogenannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + iy_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + iy_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + iy_0)$$

erfüllt sind.

A 4 Sei wieder die Ableitung $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, das heißt, sie entspreche einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl c. Zeige, dass gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \xrightarrow{z \to z_0} 0.$$

Wenn eine solche Zahl c exisitiert, heißt f komplex differenzierbar in z_0. Folgere, dass f genau dann komplex differenzierbar ist, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.