5. Tutorium Analysis II (Roch) ①

A1 1.) Sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

$b = (b_1, \dots, b_n)$

Dann ist $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$ und $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) = a_{ik}$

d.h. $f'(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Da jede der Funktionen

$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ stetig ist, ist f differenzierbar. Man kann das

Resultat auch leicht aus der Definition der

Differenzierbarkeit herleiten.

2) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$

Dann ist
$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2 a_{kk} x_k + \sum_{l \neq k} (a_{lk} x_l + a_{kl} x_l) + b_k$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (a_{lk} + a_{kl}) x_l + b$$

Also folgt: $f'(x) = (A + A^T) \cdot x + b$

Da die Fkt. $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ stetig sind, ist f differenzierbar.

A2: Sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Die Funktionen $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $p_i(x) = x_i$ sind differenzierbar, also ist die Funktion $f_i(x) = p_i(f(x))$ auch differenzierbar (jede Komponente von f ist differenzierbar). Genauso sind alle Komponenten $g_1, \ldots, g_n$ von g differenzierbar. Damit ist

$$h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot g_i(x)$$

als Produkt differenzierbarer Fkt. wieder differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) + f_i(x) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x)$$

Damit folgt:

$$h'(x) = g(x)^T \cdot f'(x_0) + f(x)^T \cdot g'(x).$$

5. Tutorium Analysis I

A3. Sei $(x,y,z) = (0,0,0)$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz(y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\quad) = \frac{xz(x^2+z^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\quad) = \frac{xy(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Für $(x,y,z) = (0,0,0)$ haben wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = 0$$

genauso $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0) = 0$. Damit ist

f in allen Variablen partiell differenzierbar.

Für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ stetig in (x,y,z) und deshalb ist f für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ auch differenzierbar.

5. Tutorium Analysis II

Wir zeigen, daß f in $(0,0,0)$ <u>nicht</u> differenzierbar ist.

Wäre f in $(0,0,0)$ differenzierbar, hätten wir

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\,v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\,v_3$$

$$\equiv 0 \quad \text{für alle Vektoren } v \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \|v\| = 1$$

Andererseits gilt für $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) - f(0,0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}h\right)^3}{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}h\right)^2 \cdot h} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \neq 0$$

Damit ist f in $(0,0,0)$ nicht differenzierbar.

A4. Wir gehen <u>direkt</u> vor.

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= \langle A(x+h), A(x+h)\rangle \\
&= \langle A^TA(x+h), (x+h)\rangle \\
&= \langle A^TAx, x\rangle + \langle A^TAx, h\rangle + \langle A^TAh, x\rangle \\
&\quad + \langle A^TAh, h\rangle \\
&= \langle A^TAx, x\rangle + 2\langle A^TAx, h\rangle + \underbrace{\langle Ah, Ah\rangle} \\
&= f(x) \quad + \underbrace{2\langle A^TAx, h\rangle} + r(h)
\end{aligned}
$$

$r(h) \to 0$ für $h \to 0$ lineare Abbildung $\Rightarrow$

$$Df(x) = 2A^TAx$$