Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22. Mai 2006

5. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Differenzierbarkeit)

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = Ax + b$, wobei A eine reelle $n \times n$-Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie dass f Frechet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.
2. Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = \langle Ax + b, x\rangle$, wobei A eine reelle $n \times n$-Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie dass f Frechet-differenzierbar ist und berechnen Sie den Gradienten von f.

A 2 (Differenzierbarkeit)

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$,

$$h(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$$

auch differenzierbar ist und berechnen Sie den Gradienten von h.

A 3 (Partielle Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f

1. partiell differenzierbar;
2. differenzierbar

ist. In allen Punkten, wo es möglich ist, berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.

A 4 (Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle Ax, Ax\rangle$, wobei A eine reelle $n \times n$-Matrix ist. Zeigen Sie dass f Frechet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f. Tip: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nicht!