4. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Bernstein-Polynome und der Weierstraß'sche Approximationssatz

Wir wollen in diesem Tutorium den folgenden Weierstraß'schen Approximationssatz beweisen:

Satz: *Für jede auf dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion f gibt es eine Folge (f_n) von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Wir führen den Beweis zunächst für $[a,b]=[0,1]$. Jeder Funktion f auf $[0,1]$ ordnen wir die Funktion

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

zu. Offenbar ist f_n für jede Funktion f ein Polynom vom Grad n. Das Polynom f_n heißt n-tes Bernstein Polynom für f.

A1 Bestimme die Bernstein Polynome für die Funktionen $f(x)=1$ und $f(x)=x$.
Zeige $f_n(x)=\frac{n-1}{n}x(1-x)$ für $f(x)=x(1-x)$. Mache Dir klar, dass in allen drei Fällen gilt

$$\|f-f_n\|_\infty \to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Bernstein Polynome für $f(x)=1$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1. \end{aligned}$$

Bernstein Polynome für $f(x)=x$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= x(x+(1-x))^{n-1} = x. \end{aligned}$$

Bernstein Polynome für $f(x)=x(x-1)$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)n!}{n^2 k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= \frac{n-1}{n} x(1-x) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^{k} (1-x)^{n-2-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x(1-x)(x+(1-x))^{n-2} = \frac{n-1}{n}x(1-x). \end{aligned}$$

In allen drei Fällen gilt offenbar $\|f_n - f\|_{n\to\infty} \to 0$.

A2 Beweise die Abschätzung
$$0 \le \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n}.$$

Es gilt unter verwendung von A1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (x^2 - \frac{2kx}{n} + (\frac{k}{n})^2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 - 2x^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 - 2x^2 - (1 - \frac{1}{n}) x(1-x) + x \\
&= \frac{1}{n} x(1-x).
\end{aligned}$$

Weil alle Summanden nichtnegativ sind, folgt
$$0 \le \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n} x(1-x).$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt
$$\frac{1}{n} x(1-x) = \frac{1}{n} \sqrt{x(1-x)}^2 \le \frac{1}{n} \left(\frac{x + (1-x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4n}.$$

Wir wollen nun den Weierstraßschen Approximationssatz auf $[0,1]$ in der folgenden Form zeigen.

Sei f auf $[0,1]$ stetig. Dann konvergiert die Folge (f_n) der Bernsteinpolynome gleichmäßig gegen f.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Für den Beweis des Satzes haben wir die Differenz $|f(x) - f_n(x)|$ für jedes $x \in [0,1]$ abzuschätzen. Wegen A1 gilt
$$|f(x) - f_n(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$
Wir spalten die Summe in zwei Teile auf, um auszunutzen, daß $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon$, falls $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Sei dazu
$$\begin{aligned}
A_n &= \{k \mid 0 \le k \le n,\ |x - \frac{k}{n}| < \delta\}, \\
B_n &= \{k \mid 0 \le k \le n,\ |x - \frac{k}{n}| \ge \delta\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt
$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon \ \text{ für } \ k \in A_n \ \text{ und, mit } \ c := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \ \ |f(x) - f(\frac{k}{n})| \le 2c \ \text{ für } \ k \in B_n$$

Nach der Definition von B_n gilt außerdem $\delta^2 \le (x - \frac{k}{n})^2$. Darum gilt
$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \le \frac{2c}{\delta^2} (x - \frac{k}{n})^2 \ \text{ für } \ k \in B_n.$$

A3 Schätze (1) ab und führe den Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes zu Ende.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k\in A_n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B_n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k\in A_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2c}{\delta^2} \sum_{k\in B_n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2c}{\delta^2} \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Bisher war n völlig beliebig. Wählen wir also ein n_0, so dass $\frac{2c}{\delta^2}\frac{1}{4n} < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. Dann erhalten wir für alle $x \in [0,1]$ und $n > n_0$

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

Das ist die behauptete gleichmäßige Konvergenz.

A4 Übertrage das Resultat auf ein beliebiges endliches Intervall $[a, b]$

Die Funktionen

$$g(y) = \frac{y-a}{b-a} \quad \text{und} \quad g^{-1}(y) = (b-a)x + a$$

sind Polynome, die das Intervall $[a, b]$ auf $[0, 1]$ bzw. $[0, 1]$ auf $[a, b]$ bijektiv abbilden.

Sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist $h := f \circ g^{-1}$ stetig auf $[0, 1]$. Sei h_n die zugehörige Folge von Bernstein Polynomen. Dann ist $f_n := h_n \circ g$ für jedes n wieder ein Polynom und es gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 :\quad |f(x) - f_n(x)| = |h(g(x)) - h_n(g(x))| \leq \varepsilon.$$

Also ist (f_n) die gesuchte Folge von Polynomen.