Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16/17. Mai 2006

4. Tutorium zur Analysis II

Bernstein-Polynome und der Weierstraß'sche Approximationssatz

Wir wollen in diesem Tutorium den folgenden Weierstraß'schen Approximationssatz beweisen:

Satz: *Für jede auf dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion f gibt es eine Folge (f_n) von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Wir führen den Beweis zunächst für $[a,b] = [0,1]$. Jeder Funktion f auf $[0,1]$ ordnen wir die Funktion

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

zu. Offenbar ist f_n für jede Funktion f ein Polynom vom Grad n. Das Polynom f_n heißt n-tes Bernstein Polynom für f.

A1 Bestimme die Bernstein Polynome für die Funktionen $f(x) = 1$ und $f(x) = x$.
Zeige $f_n(x) = \frac{n-1}{n} x(1-x)$ für $f(x) = x(1-x)$. Mache Dir klar, dass in allen drei Fällen gilt

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

A2 Beweise die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}.$$

Wir wollen nun den Weierstraßschen Approximationssatz auf $[0,1]$ in der folgenden Form zeigen.

Sei f auf $[0,1]$ stetig. Dann konvergiert die Folge (f_n) der Bernsteinpolynome gleichmäßig gegen f.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für den Beweis des Satzes haben wir die Differenz $|f(x) - f_n(x)|$ für jedes $x \in [0,1]$ abzuschätzen. Wegen A1 gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Wir spalten die Summe in zwei Teile auf, um auszunutzen, daß $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon$, falls $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Sei dazu

$$\begin{aligned} A_n &= \{k \mid 0 \leq k \leq n,\ |x - \frac{k}{n}| < \delta\}, \\ B_n &= \{k \mid 0 \leq k \leq n,\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon \quad \text{für} \quad k \in A_n \quad \text{und, mit} \quad c := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad |f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq 2c \quad \text{für} \quad k \in B_n$$

Nach der Definition von B_n gilt außerdem $\delta^2 \leq (x - \frac{k}{n})^2$. Darum gilt

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq \frac{2c}{\delta^2} (x - \frac{k}{n})^2 \quad \text{für} \quad k \in B_n.$$

A3 Schätze (1) ab und führe den Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes zu Ende.

A4 Übertrage das Resultat auf ein beliebiges endliches Intervall $[a,b]$