Tutorium 6. Musterlösungen

Aufgabe 1:

Wir haben:

$$|f_n(x)| \leq \frac{|nx| \cdot (7 + |\sin nx|)}{4 + (nx)^2} \leq \frac{8|nx|}{4 + (nx)^2}$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}$.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{7 + \sin 1}{5} \text{ ist.}$$

Damit sehen wir, dass $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$, also ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Aufgabe 2

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ punktweise auf $[0,\infty)$. Also berechnen wir jetzt:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} |n^a x e^{-nx}| = \sup_{x\in[0,\infty)} n^a x e^{-nx}$$

Wir haben:

$$f_n'(x) = n^a \left(x \cdot (-n) e^{-nx} + e^{-nx}\right)$$

Dann ist $f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$

Da $f_n(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir (siehe das Bild):

$$\sup_{x\in[0,\infty)} n^a x e^{-nx} = n^a \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = e^{-1} n^{a-1}$$

Also wenn $a < 1$ ist, dann $\|f_n - f\|_\infty \to 0$;

wenn aber $a \geq 1$ ist, dann $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Antwort: Die Konvergenz ist gleichmäßig $\iff a < 1$ und die Grenzfunktion $f(x) = 0$.

Aufgabe 3:

(a) Wenn $x = 0$ ist, dann ist $f(x) = 0$.

Sei $x \neq 0$. Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{e^{n|x|}\sqrt{n}}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ absolut konvergiert.

Sei also $a_n = \frac{|x|}{e^{n|x|}\sqrt{n}}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{|x|}}{e^{|x|}\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \longrightarrow \frac{1}{e^{|x|}\sqrt{1}} = e^{-|x|} < 1 \text{ für alle } x \neq 0.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

(b) Da $\left|\frac{\cos nx}{n^3+1}\right| \leq \frac{1}{n^3+1}$ ist und da die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3+1}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^3+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4:

(a) Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{e^{k|x|}\sqrt{k}}$

Die Funktionen $f_n(x)$ sind stetig, und f_n konvergiert punktweise gegen f. Um zu zeigen, dass die Funktion f stetig ist, genügt es zu zeigen, dass die Konvergenz $f_n \to f$ gleichmäßig ist. Sei

$$g_n(x) = \frac{x}{e^{n|x|}\sqrt{n}}$$

Dann ist $\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{e^{n|x|}\sqrt{n}} = \sup_{x\in(0,\infty)} n^{-\frac{1}{2}} x e^{-nx} =$

$= e^{-1} n^{-\frac{3}{2}}$ (siehe Aufgabe 2).

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_\infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^3+1}$

Die Funktionen f_n sind differenzierbar und f_n konvergiert gegen f. Um zu zeigen, dass die Funktion f differenzierbar ist, genügt es zu beweisen, dass (f_n') gleichmäßig konvergiert. Sei

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3+1}$$

Dann ist $g_n'(x) = \frac{-n\sin(nx)}{n^3+1}$ und damit erhalten wir $\|g_n'\|_\infty \le \frac{n}{n^3+1}$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n'\|_\infty$. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert, d.h. die Funktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ ist differenzierbar.

Aufgabe 4:

Um zu zeigen, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist, genügt es zu beweisen, dass f auf $[\varepsilon,\infty)$ differenzierbar ist, für jedes $\varepsilon>0$. Sei $g_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+3n}\cos(\sqrt{n}x)e^{-nx}$.

Da $|g_n(x)| \le \frac{\sqrt{n}}{1+3n} e^{-nx}$ für alle $x>0$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ punktweise auf $(0,\infty)$.

Es bleibt zu beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ auf $[\varepsilon,\infty)$ gleichmäßig konvergiert.

Wir haben $g_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+3n}\left(\cos(\sqrt{n}x)e^{-nx}(-n) + \sqrt{n}\sin(\sqrt{n}x)e^{-nx}\right)$, also ist

$$|g_n'(x)| \le \frac{\sqrt{n}}{1+3n}\left(ne^{-nx} + \sqrt{n}e^{-nx}\right) \le \frac{\sqrt{n}\,(n+\sqrt{n})}{1+3n} e^{-n\varepsilon} \le ne^{-n\varepsilon}$$

für alle $x\in[\varepsilon,\infty)$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\varepsilon}$ konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ gleichmäßig auf $[\varepsilon,\infty)$.