2. Tutorium zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Die Hölder'sche Ungleichung

Aufgaben

A 1 Sei $r : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $r(0) = 0$, deren Umkehrfunktion r^{-1} auf ganz $[0, \infty)$ definiert ist. Seien außerdem für $u, v > 0$

$$M(u) = \int_0^u r(t)dt \quad \text{and} \quad N(v) = \int_0^v r^{-1}(t)dt.$$

Veranschauliche Dir graphisch, dass $uv \leq M(u)+N(v)$ für alle $u, v \geq 0$. Für welche u, v gilt Gleichheit?

uv ist der Flächeninhalt Rechtechs mit Breite u und Höhe v.

$M(u)$ ist der Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graph von r, der x-Achse und der Gerade $x = u$ eingeschlossen wird. $N(v)$ ist der Inhalt der Fläche, die oberhalb der Kurve und unterhalb der Geraden $y = v$ und rechts von der y-Achse liegt. Deren Summe ist offenbar $\geq uv$.

Die Gleichheit gilt, falls $v = r(u)$.

Von nun an darfst Du annehmen, dass die Aussage von A1 beweisen ist.

A 2 Seien p, q positive Zahlen und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweise, dass $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ für alle $u, v \geq 0$.

Wir verwenden A1 für $r(t) = t^{p-1}$. Dann ist $r^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p-1}} = t^{q-1}$. Das heißt

$$M(u) = \int_0^u t^{p-1}dt = \frac{t^p}{p}\Big|_0^u = \frac{u^p}{p}$$

und

$$N(v) = \int_0^v t^{\frac{1}{p-1}}dt = \int_0^v t^{q-1}dt = \frac{v^q}{q}.$$

Also ist $uv \leq M(u) + N(v) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ für alle $u, v \geq 0$.

A 3 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Angenommen

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

Beweise, dass

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq 1.$$

(b) **(Hölder'sche Ungleichung)**
Beweise unter Verwendung von (a), dass

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(a) Wir verwenden A2 für die Zahlen $u = |f(x)|$ und $v = |g(x)|$:

$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

Also ist

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{p}dx + \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{q}dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(b) *Wir bezeichnen* $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ *und* $\|g\|_q = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$. *Wenn eine der beiden Zahlen, zum Beispiel* $\|f\|_p$ *gleich 0 ist, dann ist (weil* f *stetig ist - siehe Tutorium 1)* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in [a, b]$. *In diesem Fall gilt die Ungleichung.*

Nehmen wir also an, dass $\|f\|_p \neq 0$ *und* $\|g\|_q \neq 0$. *Sei* $u(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$ *und* $v(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$. *Dann ist*

$$\int_a^b |u(x)|^p dx = \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_a^b |v(x)|^q dx = \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} dx = 1.$$

Aus (a) erhalten wir

$$\left| \int_a^b u(x)v(x)dx \right| \leq 1$$

das heißt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$