Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrinzio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Mai 2006

2. Tutorium zur Analysis II

Die Hölder'sche Ungleichung

Aufgaben

A 1 Sei $r : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $r(0) = 0$, deren Umkehrfunktion r^{-1} auf ganz $[0, \infty)$ definiert ist. Seien außerdem für $u, v > 0$

$$M(u) = \int_0^u r(t)dt \quad \text{and} \quad N(v) = \int_0^v r^{-1}(t)dt.$$

Veranschauliche Dir graphisch, dass $uv \le M(u) + N(v)$ für alle $u, v \ge 0$. Für welche u, v gilt Gleichheit?
Von nun an darfst Du annehmen, dass die Aussage von A1 beweisen ist.

A 2 Seien p, q positive Zahlen und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweise, dass $uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ für alle $u, v \ge 0$.

A 3 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Angenommen

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \int_a^b |g(x)|^q dx = 1.$$

Beweise, dass

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le 1.$$

(b) **(Hölder'sche Ungleichung)**
Beweise unter Verwendung von (a), dass

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$