Tutorium 1. Musterlösungen S103/107
16.15–17.55

Aufgabe 1:

(a) Sei $Z_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$.

Dann ist (machen Sie ein Bild für $n=4$ und $n=5$):

$$U(Z_n,f) = \frac{1}{2^n}\left((2^{n-1}-1)\cdot\frac{1}{2^0} + 2^{n-2}\cdot\frac{1}{2^1} + 2^{n-3}\frac{1}{2^2} + \ldots + 2^1\cdot\frac{1}{2^{n-2}} + 2^0\frac{1}{2^{n-1}} + 1\cdot\frac{1}{2^n} + 0\right) =$$

$$= \frac{2^{n-1}-1}{2^n} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Analog finden wir

$$O(Z_n,f) = \frac{1}{2^n}\left(2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^0} + 2^{n-2}\frac{1}{2^1} + 2^{n-3}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + 2\cdot\frac{1}{2^{n-2}} + 2^0\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + 1\cdot\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + \frac{1}{4^n}.$$

Damit ist $\inf_Z O(Z,f) \leq \lim_{n\to\infty} O(Z_n,f) = \frac{2}{3}$ und auch $\sup_Z U(Z,f) \geq \lim_{n\to\infty} U(Z_n,f) = \frac{2}{3}$. Da $\sup_Z U(Z,f) \leq \inf_Z O(Z,f)$ erhalten wir $\inf_Z O(Z,f) = \sup_Z U(Z,f) = \frac{2}{3}$. Damit ist f integrierbar und $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$.

(b) Sei $n \geq 3$ und

$$Z_n = \{0, \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{n-1} + \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{n-2} - \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{n-2} + \tfrac{1}{2^n}, \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^n}, 1 - \tfrac{1}{2^n}, 1\}$$

Dann ist

$$O(Z_n,f) = \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{(n-2)\text{ Mal}} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2^{n-1}}.$$

Damit ist $\inf_Z O(Z,f) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{2^{n-1}}\right) = 0$

Da $f \geq 0$, ist auch $U(Z,f) \geq 0$ für jede Zerlegung Z, also ist $\sup_Z U(Z,f) \geq 0$. Da $\sup_Z U(Z,f) \leq \inf_Z O(Z,f)$, erhalten wir $\inf_Z O(Z,f) = \sup_Z U(Z,f) = 0$.

Das bedeutet, dass f integrierbar ist und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

(c) Sei $Z_n = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, wobei

$$N = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \quad (= 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)).$$

Der Wert 1 wird genau einmal angenommen (im Punkt $x=1$), der Wert $\frac{1}{2}$ wird auch einmal angenommen, und für $n > 2$ wird der Wert $\frac{1}{n}$ höchstens $(n-1)$-mal angenommen.

Damit ist

$$O(Z_n,f) \leq \frac{1}{N}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{4} + \ldots + (n-1)\frac{1}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{N}(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ Mal}}) = \frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}}$$

Da $f \geq 0$, ist $O(Z,f) \geq 0$ für jede Zerlegung Z.

Außerdem ist $\inf_Z O(Z,f) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}} = 0$, d.h. $\inf_Z O(Z,f) = 0$.

Da für jede Zerlegung Z, $U(Z,f)=0$ ist, erhalten wir

$$\sup_Z U(Z,f)=0,$$

Daraus schließen wir, dass f integrierbar ist und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

Aufgabe 2

(a) Angenommen, die Aussage sei falsch. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in [a,b]$, in dem die Funktion f stetig ist und $f(x_0)>0$. Also existiert ein $\delta>0$, so dass $f(x)\geq \frac{1}{2} f(x_0)$ für alle $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$. (Diese Aussage folgt direkt aus der Definition der Stetigkeit, wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$.)

Wähle $Z=\{a, x_0-\delta, x_0+\delta, b\}$. Da $\inf_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ und $f\geq 0$, erhalten wir

$$U(Z,f) \geq 0\cdot(x_0-\delta-a) + \frac{1}{2} f(x_0)\cdot 2\delta + 0\cdot(b-x_0-\delta)$$
$$= \delta\cdot f(x_0).$$

Daraus folgt, dass $\sup_Z U(Z,f)>0$. Die letzte Ungleichung ist unmöglich, da $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Widerspruch.

(b) Nein, z.B. die Funktion f aus 1 (b) erfüllt $f\geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, aber $f(x)\neq 0$ für $x=\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Nein! Sei $[a,b]=[c,d]=[0,1]$ und

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x=\frac{p}{q} \quad (p,q\text{-teilerfremd}) \\ 0 & \text{für } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

und

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{für } x=\frac{1}{n} \quad (n\geq 1) \\ 0 & \text{für } x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$$

Nach Aufgabe 1 (b), (c) sind beide Funktionen integrierbar. Aber

$$h(x)=g(f(x))=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Da $U(Z,h)=0$ für alle Zerlegungen Z, ist $\sup_Z U(Z,h)=0$. Analog, $O(Z,h)=1$ für alle Z und damit ist $\inf_Z O(Z,h)=1$. Also ist die Funktion $g\circ f$ nicht integrierbar.