Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Katrin Krohne
Patrizio Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18. April 2006

1. Tutorium zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Riemann-Integrierbarkeit)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, ob sie Riemann-integrierbar ist. Falls ja, bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n} \ (n \geq 0), \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q};\ p, q - \text{teilerfremd}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

A 2 (Stetigkeit und Integrierbarkeit)

Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle Punkte $x \in [a,b]$, in denen die Funktion stetig ist.
2. Folgt auch, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$?

A 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine integrierbare stetige Funktion. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,$$

für jede stetige Funktion $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$.