13. Übung zur Analysis II, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Nullmengen)
Entscheide, welche der folgenden Mengen Nullmengen im $\mathbb{R}^3$ sind. Begründe Deine Entscheidung.

1. $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $U \subset \mathbb{R}^3$, U offen.
3. $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

1. $\mathbb{Z}^3$ *ist abzählbar. Sei* $(a_i)_i$ *eine Abzählung. Sei*

$$I_i := (a_i^{(1)} - \varepsilon\frac{1}{n}, a_i^{(1)} + \varepsilon\frac{1}{n}) \times (a_i^{(2)} - \varepsilon\frac{1}{n}, a_i^{(2)} + \varepsilon\frac{1}{n}) \times (a_i^{(3)} - \varepsilon\frac{1}{n}, a_i^{(3)} + \varepsilon\frac{1}{n}).$$

Dann gilt $\mathbb{Z}^3 \subset \bigcup_i I_i$ *und*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = 8\varepsilon^3 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq c\varepsilon.$$

Also ist $\mathbb{Z}^3$*, wie jede abzählbare Menge, eine Nullmenge.*

2. Ist $U = \emptyset$*, dann ist* U *eine Nullmenge. Sei also* $U \neq \emptyset$*, also gibt es ein* $x \in U$*. Weil* U *offen ist, gibt es ein* $\rho > 0$*, so dass* $I := (x_1 - \rho, x_1 + \rho) \times (x_2 - \rho, x_2 + \rho) \times (x_3 - \rho, x_3 + \rho) \subset U$*. Dann gilt auch*

$$J := [x_1 - \frac{\rho}{2}, x_1 + \frac{\rho}{2}] \times [x_2 - \frac{\rho}{2}, x_2 + \frac{\rho}{2}] \times [x_3 - \frac{\rho}{2}, x_3 + \frac{\rho}{2}] \subset U.$$

Angenommen U *ist eine Nullmenge. Aus der Definition der Nullmenge folgt sofort, dass dann auch* J *eine Nullmenge ist. Da* J *auch kompakt ist, gilt nach der Bemerkung im Beweis von 12.27*

$$0 = \int_J 1\, dx = \int_{x_1-\rho}^{x_1+\rho} \int_{x_2-\rho}^{x_2+\rho} \int_{x_3-\rho}^{x_3+\rho} 1\, dx = 8\rho^3.$$

Widerspruch.

3. $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ *ist der Graph der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $f(x, y) = 0$*, und somit eine Nullmenge.*

A 2 (Volumen eines Körpers)
Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und}$$
$$Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuche eine grobe Skizze von M.

(b) Bestimme für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$_{(x,y)}M \; := \; \{z \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) \in M\}.$$

(c) Berechne das Volumen $|M|$ von M.

(a) Die in der x*-*y*-Ebene liegende Kreisscheibe* $\{(x, y, 0) \colon x^2+y^2 \leq 1\}$ *ist offensichtlich in* M *enthalten. Wenn wir uns von* $(x, y, 0)$ *mit* $x^2 + y^2 \leq 1$ *ausgehend in* z*-Richtung bewegen, geraten wir für* $z = \pm\sqrt{1 - x^2}$ *an den Rand des Zylinders* Z_2 *und für größeren Betrag von* z *aus* Z_2 *hinaus. Diese Ideen genügen, um eine vernünftige Skizze anzufertigen.*
(b) Es seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *und* $z \in \mathbb{R}$*. Dann*

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in M \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in Z_1 \text{ und } (x, y, z) \in Z_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x^2 + z^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Somit

$$ {}_{(x,y)}M = \begin{cases} [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\,] & \text{wenn } x^2+y^2 \le 1 \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases} $$

(c) Es sei $\mathbb{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 1\}$ *die Einheitskreisscheibe. Es gilt also*

$$ M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{D},\ z \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\,]\}. $$

Somit können wir nach Satz 13.33 und Satz 13.34 wie folgt rechnen.

$$ \begin{aligned} |M| &= = \int_{\mathbb{D}} 2\sqrt{1-x^2}\, dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\,. \end{aligned} $$

A 3 (Integrierbarkeit)

Gegeben seien $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ und die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

1. Zeige, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.
2. Zeige, dass
$$ \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\ dy \Big)\ dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\ dx \Big)\ dy = -\frac{1}{2} $$
gilt.
Erläutere, warum die Funktion f auf G nicht Riemann integrierbar ist.

1. *Wähle die Folge*
$$ (x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}. $$
Es gilt:
$$ f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{3}{n}\right)^3} = \frac{n^2}{27}, $$
und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$. *Also ist* f *in* $(0,0)$ *nicht stetig fortsetzbar.*
2. *Wir berechnen das erste Integral.*
Substituiere
$$ u = x + y \quad \text{mit} \quad du = dy \quad \text{und} \quad x - y = 2x - u. $$
Dann ergibt sich
$$ \begin{aligned} \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \Big)\ dx &= \int_0^1 \Big(\int_x^{x+1} \frac{2x-u}{u^3}\ du \Big)\ dx = \int_0^1 \Big(\int_x^{x+1} \left(\frac{2x}{u^3} - \frac{1}{u^2}\right)\ du \Big)\ dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} \right]_{u=x}^{u=x+1}\ dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx \\ &= -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned} $$

Mittels derselben Substitution berechnen wir das zweite Integral, wobei hier $x - y = u - 2y$. *Dann ergibt sich*

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\Big)\,dy &= \int_0^1\Big(\int_y^{y+1} \frac{u-2y}{u^3}\,du\Big)\,dy = \int_0^1\Big(\int_y^{y+1} \Big(\frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3}\Big)\,du\Big)\,dy \\ &= \int_0^1 \Big[-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2}\Big]_{u=y}^{u=y+1}\,dy \\ &= \int_0^1 \Big(-\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2}\Big)\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Da sich für diese beiden Integrale verschiedene Werte ergeben, kann f *nach dem Vertauschungssatz nicht Riemann integrierbar sein. (Man hätte auch sagen können, dass Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind.)*