Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Patrizio Neff
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

17.Juli 2006

13. Übung zur Analysis II

Aufgaben

A 1 (Nullmengen)
Entscheide, welche der folgenden Mengen Nullmengen im $\mathbb{R}^3$ sind. Begründe Deine Entscheidung.

1. $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $U \subset \mathbb{R}^3$, U offen.
3. $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

A 2 (Volumen eines Körpers)
Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuche eine grobe Skizze von M.

(b) Bestimme für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$_{(x,y)}M \ := \ \{z \in \mathbb{R} \colon (x, y, z) \in M\}\,.$$

(c) Berechne das Volumen $|M|$ von M.

A 3 (Integrierbarkeit)
Gegeben seien $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ und die Funktion $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

1. Zeige, dass die Funktion f in $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.
2. Zeige, dass
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\ dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$
gilt.
Erläutere, warum die Funktion f auf G nicht Riemann integrierbar ist.